

Series y Transformada de Fourier

- Series de Fourier
- Transformada de Fourier

Series de Fourier

- ❑ Las series de Fourier describen señales periódicas como una combinación de señales armónicas (sinusoides).
- ❑ Con esta herramienta podemos analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial o espectro.
- ❑ Nos permitirá establecer la dualidad entre tiempo y frecuencia, de forma que operaciones realizadas en el dominio temporal tienen su dual en el dominio frecuencial.
- ❑ Forma trigonométrica de las series de Fourier: se pretende describir una función periódica $x_p(t)$ de periodo T (frecuencia fundamental $f_0=1/T$, $\omega_0=2\pi f_0$).

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + \dots + a_k \cos(k\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + b_k \sin(k\omega_0 t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\end{aligned}$$

Series de Fourier

- En forma exponencial: $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s[k] \exp(jk\omega_0 t)$
 - ◆ Se ha empleado la ecuación de Euler: $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$
 - ◆ Se demuestra que $X_s[k] = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$
- Cálculo de los coeficientes $X_s[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$

- Relación de Parseval

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T x_p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_s[k]|^2$$

- ◆ La potencia contenida en una señal puede evaluarse a partir de los coeficientes de su correspondiente serie de Fourier.

Series de Fourier

- ❑ Espectro de señales periódicas : Los coeficientes $X_s[k]$ son los coeficientes espectrales de la señal $x_p(t)$.
- ❑ La gráfica de esos coeficientes en función del índice armónico k ó de las frecuencias $k\omega_0$, se denomina espectro.
- ❑ Hay dos tipos de gráficos, uno de magnitud con los coeficientes $|X_s[k]|$ y otro de la fase de $X_s[k]$.
- ❑ La función $|X_s[k]|$ así como la fase de $X_s[k]$ son funciones discretas de la frecuencia.
- ❑ Es importante saber cuantos armónicos serán necesarios para reconstruir una señal dada. Para ello utilizaremos la relación de Parseval.

Series de Fourier

- Un parámetro importante en la reconstrucción de señales es la velocidad de convergencia, o lo que es lo mismo la velocidad a la cual los coeficientes de Fourier tienden a 0.

- **Propiedades**

Superposicion $\alpha x_p(t) + \beta y_p(t) \leftrightarrow \alpha X_S[k] + \beta Y_S[k]$

Derivada $x_p'(t) \leftrightarrow jk2\pi f_0 X_S[k] \quad (k \neq 0)$

Integral $\int_0^t x_p(t) dt \leftrightarrow \frac{X[k]}{jk2\pi f_0} + C \quad (k \neq 0)$

Retraso $x_p(t - \alpha) \leftrightarrow X_S[k] \exp(-jk2\pi f_0 \alpha)$

Escalado $x_p(\alpha t) \leftrightarrow X_S[k] \quad (\text{armonicos en } f = kf_0 \alpha)$

$$x_p(-t) \leftrightarrow X_S[-k] = X_S^*[k]$$

Modulacion $\cos(m2\pi f_0 t) x_p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \{ X_S[k - m] + X_S[k + m] \}$

$$\frac{1}{2} \{ x_p(t + \alpha) + x_p(t - \alpha) \} \leftrightarrow \cos(2\pi f_0 \alpha) X_S[k]$$

Convolucion $x_p(t) y_p(t) \leftrightarrow X_S[k] * Y_S[k]$

$$x_p(t) \bullet y_p(t) \leftrightarrow X_S[k] Y_S[k]$$

Series de Fourier

□ Respuesta de un sistema a entradas periódicas

- ◆ Tenemos un sistema cuya respuesta a impulso es $h(t)$. Si sometemos esta sistema a una entrada armónica $x(t)=\exp(j\omega t)$, la respuesta $y(t)$ será la convolución de $h(t)$ con $x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \exp\{j\omega(t - \lambda)\} d\lambda = \exp(j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \exp(-j\omega\lambda) d\lambda = x(t)H(\omega)$$

- ◆ Como toda señal $x_p(t)$ puede ser expresada como una suma infinita de armónicos y aplicando el principio de superposición:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_S[k] \exp(jk\omega_0 t) \leftrightarrow y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_S[k] H[k\omega_0] \exp(jk\omega_0 t)$$

- ◆ La respuesta del sistema a una señal periódica es también una señal periódica de la misma frecuencia que la señal de entrada, pero con diferentes magnitudes y fases.
- ◆ La respuesta de un sistema a entradas armónicas nos da la respuesta estacionaria del sistema.

Series de Fourier

□ Efecto Gibbs

- ◆ Para señales discontinuas, su reconstrucción a partir de las series de Fourier produce el llamado efecto Gibbs, que consiste en la aparición de un pico del 9% en el punto de discontinuidad. Este efecto se da incluso cuando se emplea un número grande de armónicos para la reconstrucción.
- ◆ Si queremos aproximar una función periódica con discontinuidades que tiene infinitos armónicos, tendremos que truncar la función hasta el armónico N . Esto nos va a producir el efecto Gibbs.
- ◆ Para eliminarlo se utilizan las llamadas ventanas espectrales que suavizan la reconstrucción de la función. Veremos más acerca de estas ventanas en capítulos próximos.

Transformada de Fourier

- Queremos ampliar el concepto de series de Fourier a señales no periódicas. Podemos visualizar una señal no periódica como una señal continua de periodo infinito :
 - ◆ El espaciado entre frecuencias se aproxima a 0 y es por tanto una función continua.
 - ◆ La señal pasa a ser de potencia a señal de energía.
 - ◆ Los coeficientes $X_s[k]$ son 0. Ya no es un indicador del contenido espectral de la señal.

- Se define la Transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot X_s[k] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

- Relación entre las Series y la Transformada de Fourier:
 - ◆ $X(\omega)$ es la función envolvente de $X_s[k]$.
 - ◆ Si muestreamos $X(\omega)$ a intervalos f_0 , la función resultante es el espectro de una señal periódica de periodo $T_0 = 1/f_0$.

Transformada de Fourier

- ◆ Es decir, muestrear en el dominio frecuencial se corresponde con señales periódicas en el dominio temporal.

- ◆ $X(f) = T \cdot X_S[k]_{k \cdot f_0 = f}$

- ◆ $X_S[k] = \frac{X(f)}{T} \Big|_{f = k \cdot f_0}$

- Transformada Inversa de Fourier para una función $X(\omega)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

Transformada de Fourier

□ Propiedades de la Transformada de Fourier

Superposicion $F\{ax(t)+by(t)\} = aX(\omega) + bY(\omega)$

Derivada $F\{x'(t)\} = j\omega X(\omega)$

$$F\{x^n(t)\} = (j\omega)^n X(\omega)$$

$\times t$ $F\{-j2\pi t x(t)\} = 2\pi X'(\omega)$

$$F\{(-j2\pi t)^n x(t)\} = (2\pi)^n X^n(\omega)$$

Integral $F\left\{\int_{-\infty}^t x(t) dt\right\} = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Escalado $F\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

Desplazamiento $F\{x(t-\alpha)\} = e^{-j\omega\alpha} X(\omega)$

$$F\{e^{j2\pi\alpha t} x(t)\} = X(f-\alpha)$$

Convolucion $F\{x(t)*y(t)\} = X(\omega)Y(\omega)$

$$F\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi} [X(\omega)*Y(\omega)]$$

Parseval $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

Teorema

del valor Inicial $x(0^+) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega X(\omega)]$

Transformada de Fourier

- ❑ Podemos utilizar la Transformada de Fourier para analizar la respuesta a sistemas LTI, valiéndonos del hecho de que convolución en el tiempo equivale al producto en el dominio frecuencial.

- ❑ Si la respuesta $y(t)$ a un sistema con una respuesta a impulso $h(t)$ y entrada $x(t)$ con condiciones iniciales cero es

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la Transformada de Fourier a ambos miembros,

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

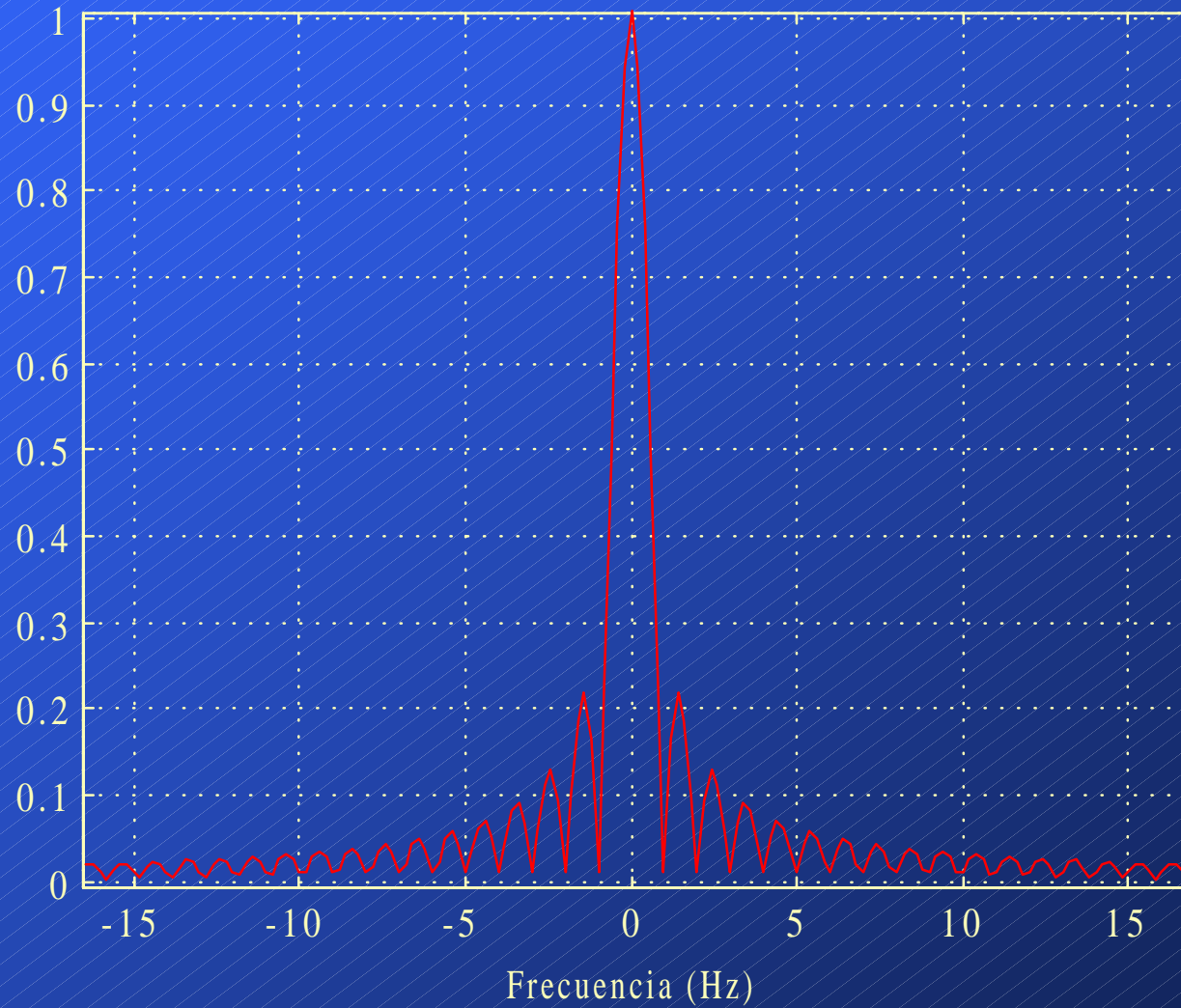
$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ es la función de Transferencia del sistema. Esta nos permite analizar la respuesta frecuencial del sistema.

- ❑ Como se vió en las Series de Fourier, se puede analizar la respuesta en el estado estacionario del sistema a partir de $H(\omega)$.

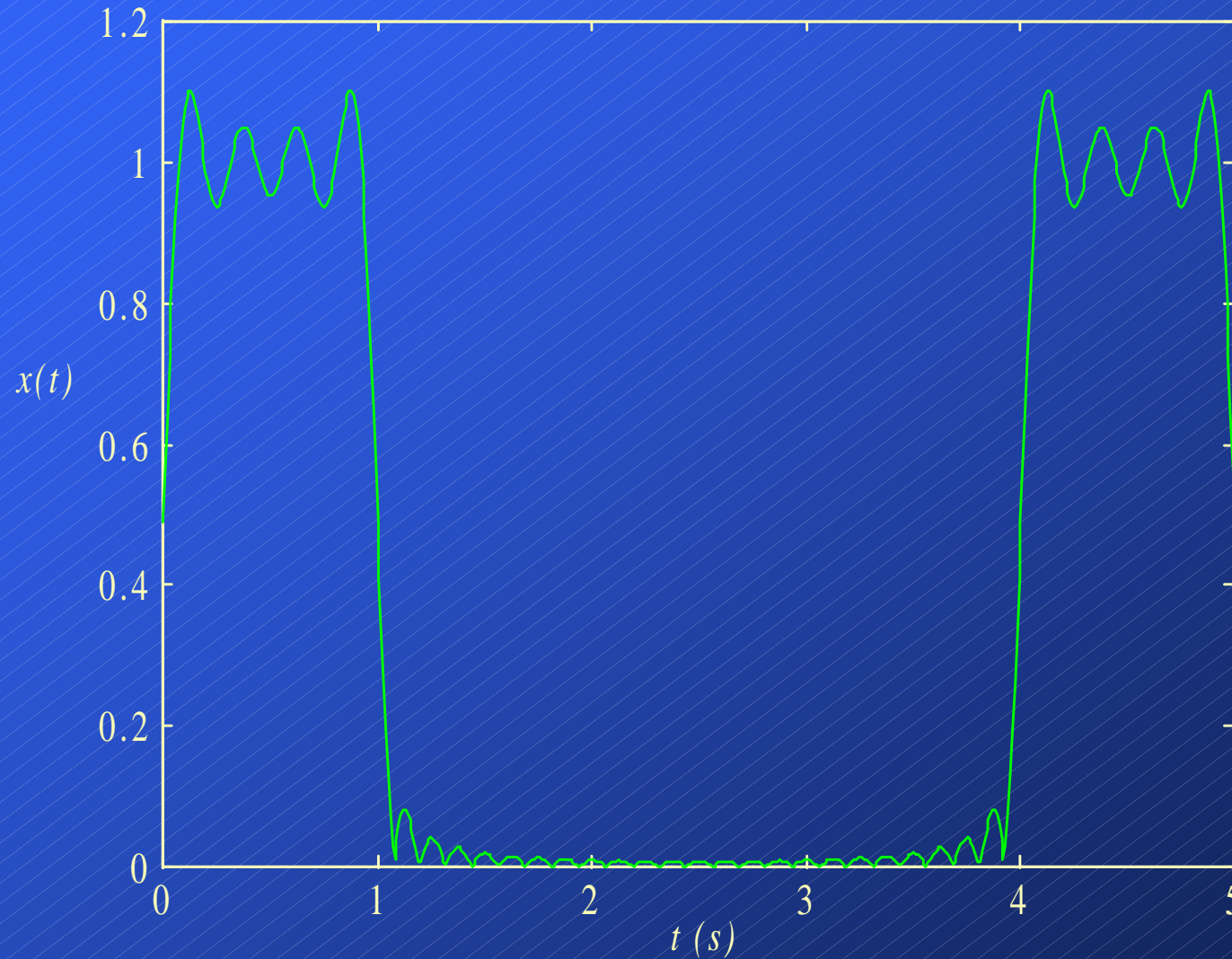
Transformada de Fourier

- Limitaciones de la Transformada de Fourier
 - ◆ El sistema debe tener condiciones iniciales cero.
 - ◆ Entradas que no son señales de energía requieren el uso de impulsos.
- Por ello se extiende el concepto de la Transformada de Fourier a la Transformada de Laplace.

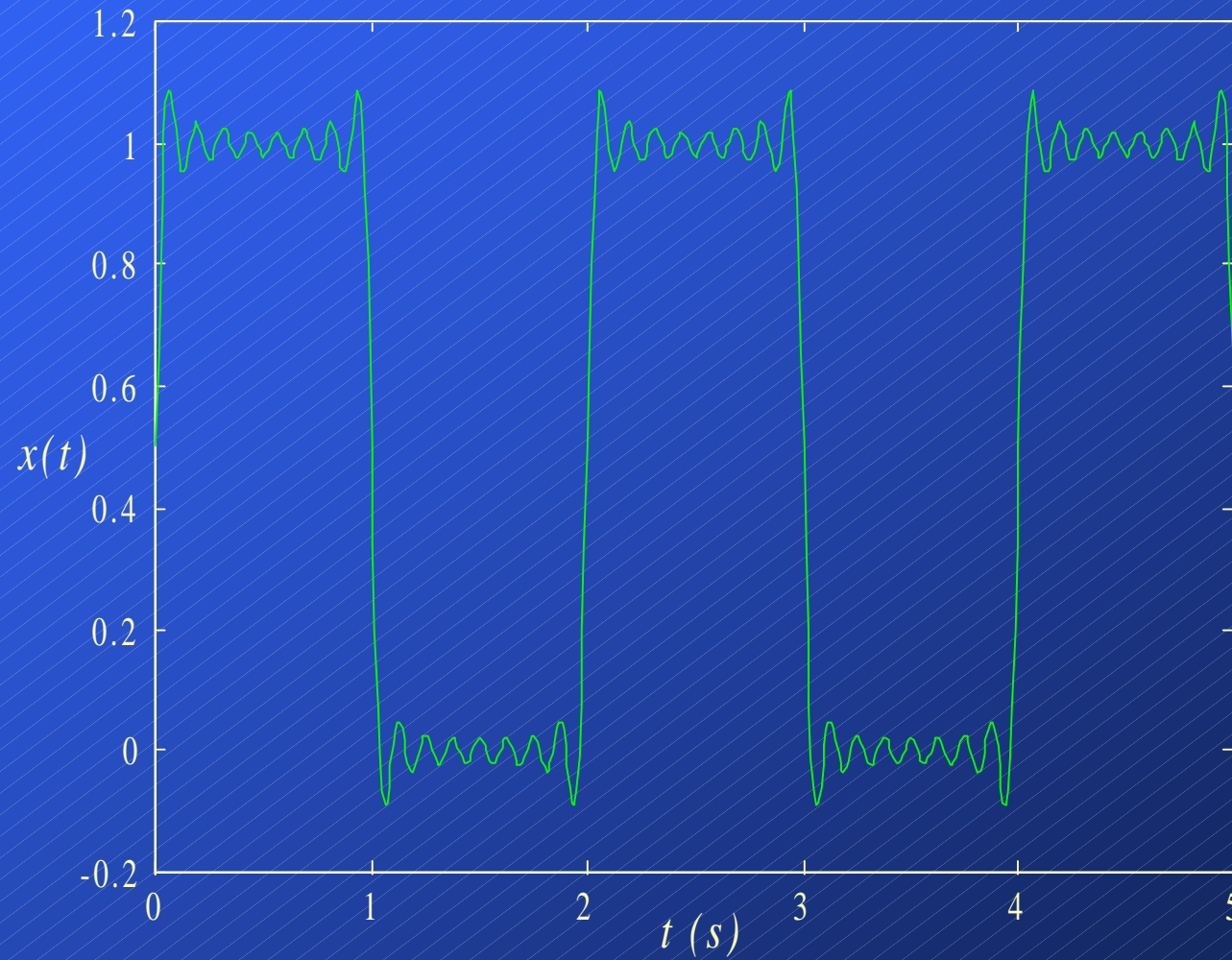
Espectro de la señal $x(t) = \text{rect}(t)$



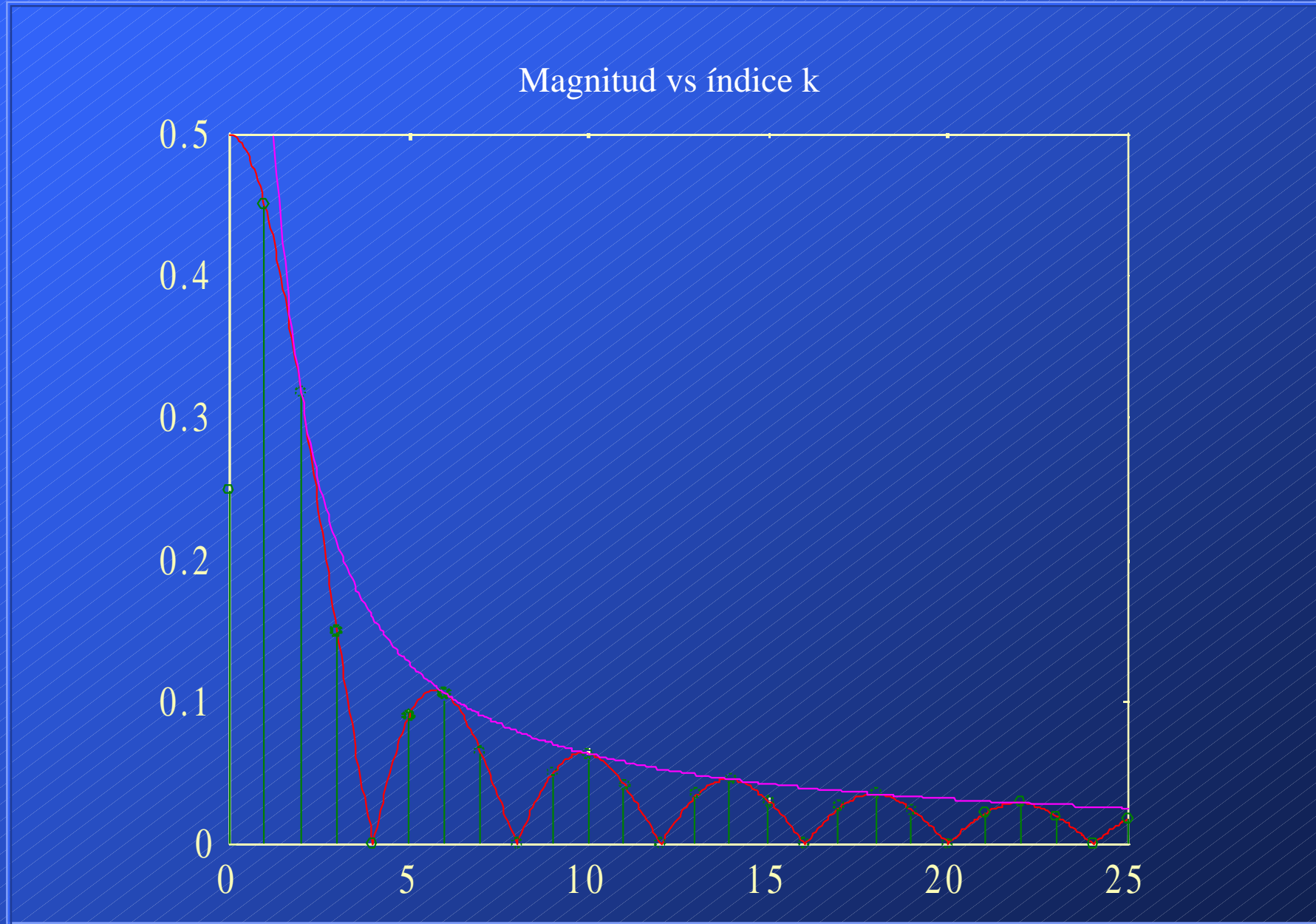
Reconstrucción de $x(t)$ (15 armónicos) a partir de muestreos en el espectro
Muestras cada 0.25 Hz



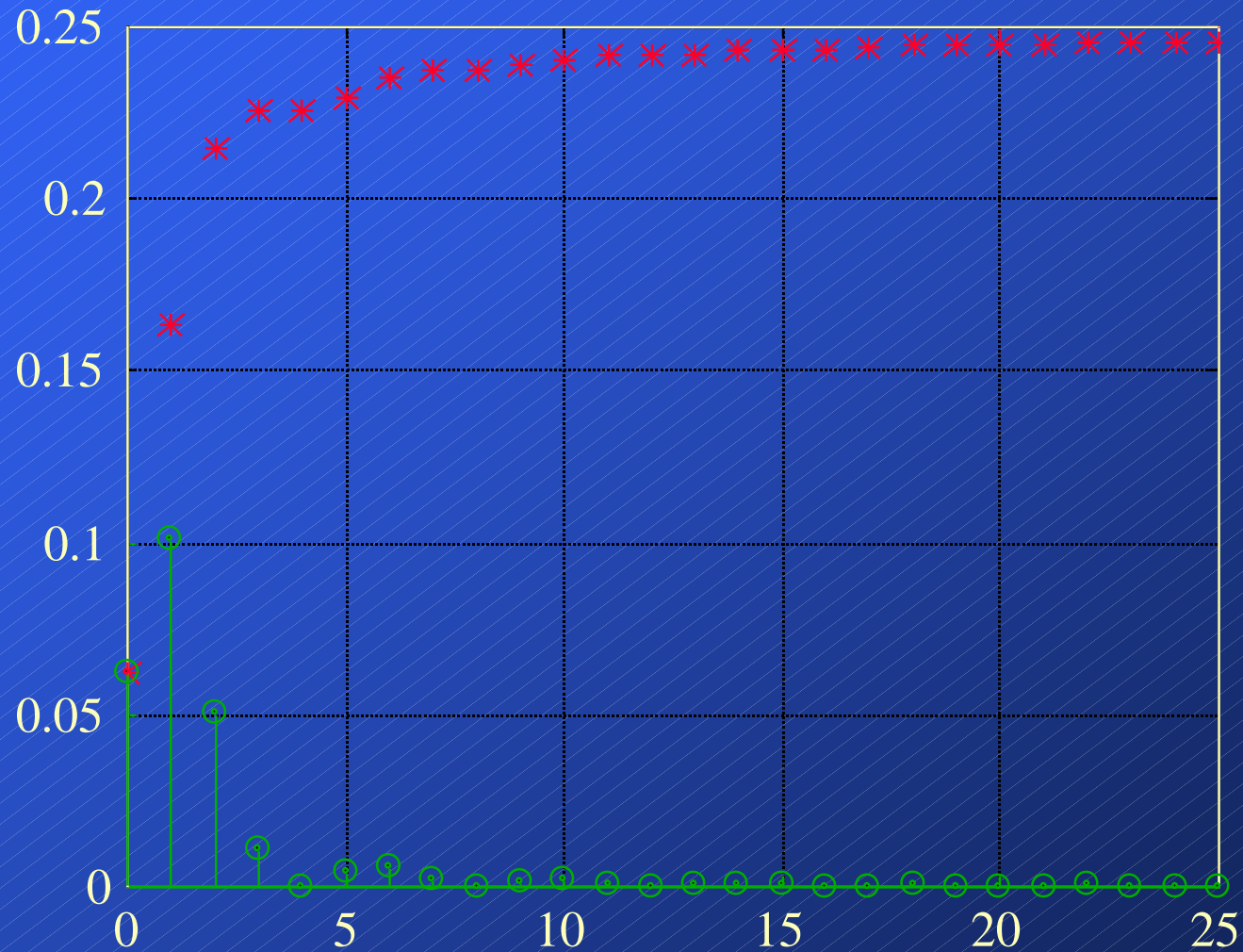
Reconstrucción de $x(t)$ (15 armónicos) a partir de muestreos en el espectro
Muestreos cada 0.5 Hz



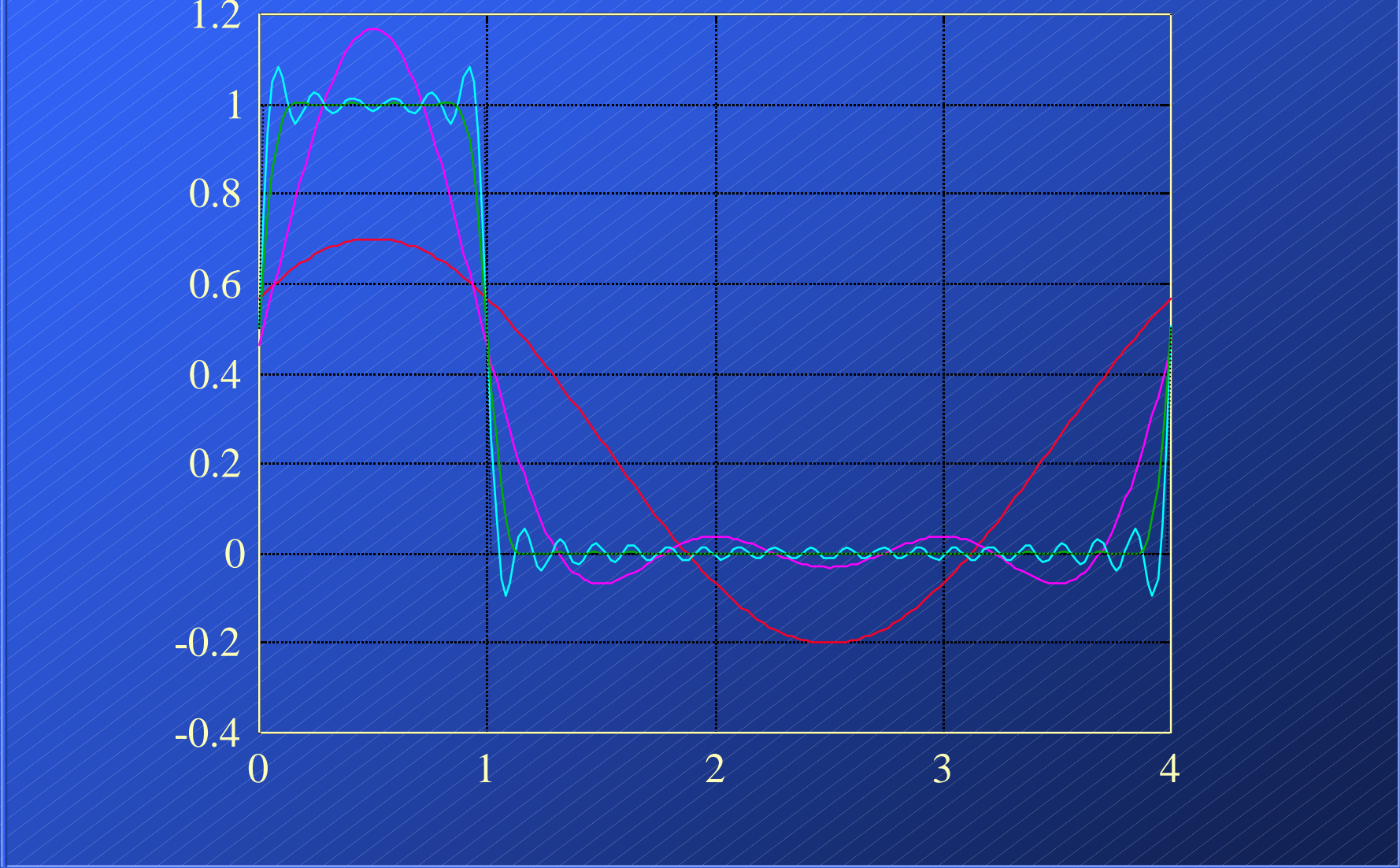
Magnitud vs índice k



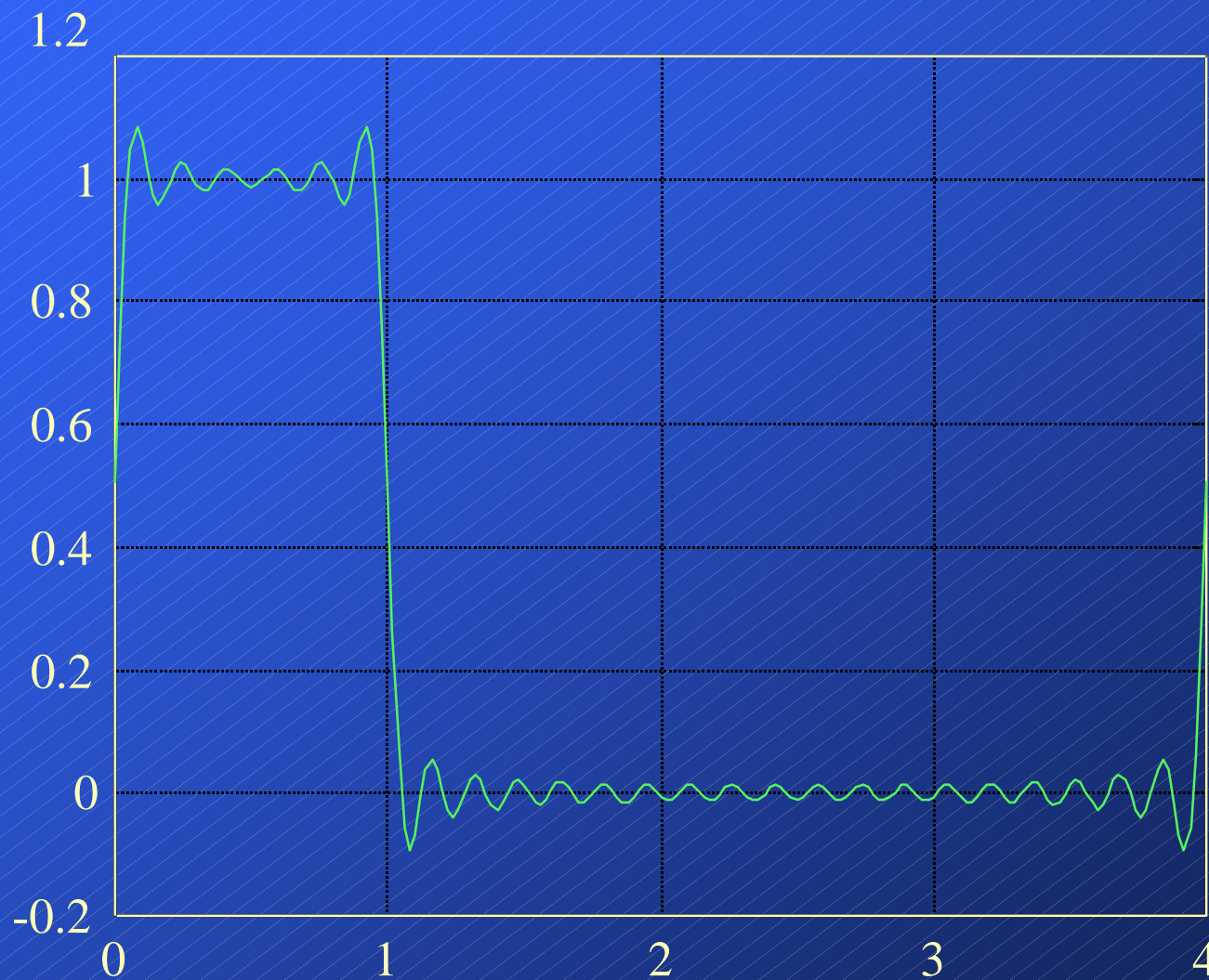
power(o) & cumulative power(*) vs k



Reconstrucciones de un periodo de $x(t)$



Reconstrucción con 25 armónicos



Reconstrucción real (---) y suavizada (---) con 25 armónicos

