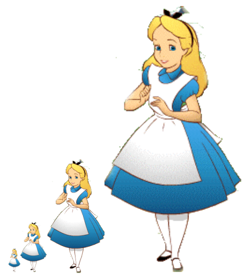
Transformaciones



Contenido

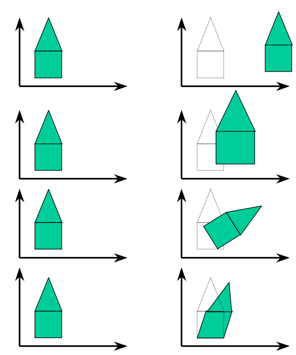
- Sistemas de coordenadas
- Transformaciones en 2D
- Transformaciones en 3 dimensiones
- Composición de transformaciones
- Rotación alrededor de un pivot
- Rotación alrededor de un eje

Agradecimientos:
A Alex García-Alonso por facilitar el material para la realización de estas transparencias (http://www.sc.ehu.es/ccwgamoa/clases)

Sistemas de coordenadas

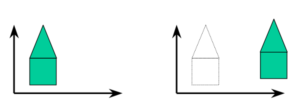
- Un objeto se representa por polígonos
- Un polígono es una colección de vértices y aristas
- Para transformar un objeto se transforman sus vértices
- Del sistema local al sistema global: transformaciones

Transformaciones en 2D



- Traslación
- Escalado
- Rotación
- Deformación

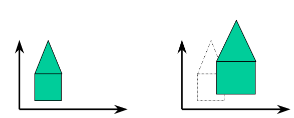
2 dimensiones: traslación



$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

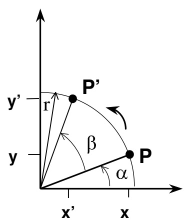
2 dimensiones: escalado



$$x' = s_x \cdot x$$
$$y' = s_y \cdot y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 dimensiones: rotación



$x = r \cos \alpha$

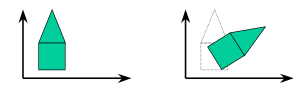
$y = r \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned} x' &= r \cos (\alpha + \beta) = \\ &= r (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \sin \beta) = \\ &= x \cos \beta - y \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \\ &= r (\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta) = \\ &= x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned}$$

2 dimensiones: rotación

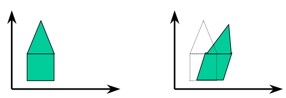
- Representado matricialmente en coordenadas homogéneas:



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 dimensiones: deformación (shear)

- Deformación de la coordenada x:



$$\begin{aligned} x' &= x + h_x \cdot y \\ y' &= y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones en 3 dimensiones

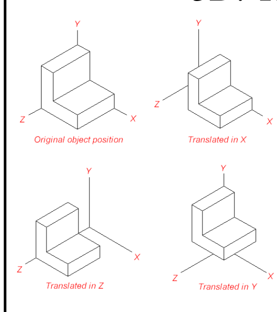
- La expresión general de una transformación en tres dimensiones en coordenadas homogéneas es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación M_{44}

- Describe todas las transformaciones: traslación, escalado, rotación, deformación.
- La composición de transformaciones se realiza mediante el producto de matrices
- Se pueden obtener los valores de la transformación a partir de la matriz: desplazamiento, escala y giro.

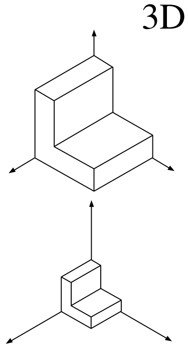
3D: Traslación



$$\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \\ z' &= z + t_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D: Escalado

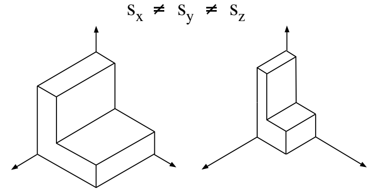


$$x' = s_x \cdot x$$
$$y' = s_y \cdot y$$
$$z' = s_z \cdot z$$

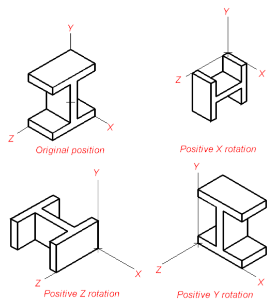
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D: Escalado no homogéneo

$$s_x \neq s_y \neq s_z$$



3D: Rotación



3D: Matrices de rotación

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en z

Otras transformaciones

Oblicua en xy (z invariante)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

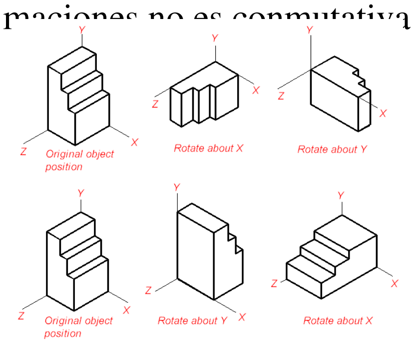
Reflexión plano xy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composición de transformaciones

- Se pueden aplicar sucesivas transformaciones a un punto.
  - Al resultado de la primera transformación:
    - $M_1 \cdot P$
  - se aplica una segunda transformación:
    - $M_2 \cdot [M_1 \cdot P] = [M_2 \cdot M_1] \cdot P$
- La composición de transformaciones se realiza mediante el producto de matrices
    - $M = M_n \cdot M_{n-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$

La composición de transfor-maciones no es conmutativa



Estructura jerárquica

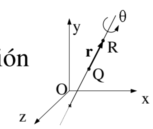
- Un objeto se sitúa respecto a su sistema de coordenadas.
- Todo el conjunto se puede situar en un sistema de coordenadas distinto y así sucesivamente.
- Las coordenadas en el sistema final se obtienen por composición de transformaciones.

Rotación alrededor de un pivot

- Si el eje de rotación no pasa por el origen, son necesarias las siguientes operaciones
  - Trasladar el punto de rotación Q, al origen
  - Realizar la rotación
  - Deshacer la traslación
- La composición de transformaciones es:
  - $M_{R_Q}(\theta) = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$
  - $M_{R_Q}(\theta) = M_T(q_x, q_y, q_z) \cdot M_R(\theta) \cdot M_T(-q_x, -q_y, -q_z)$
- El escalado se realiza análogamente

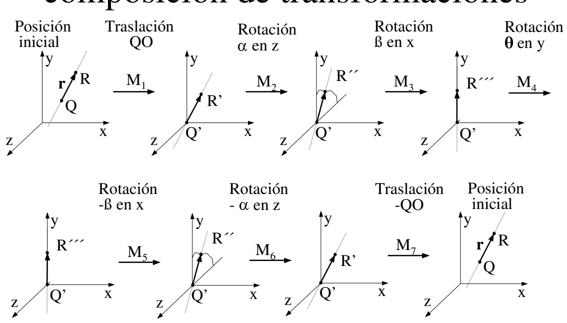
Rotación alrededor de un eje

- El eje define por un punto “Q” y un vector unitario “r”. Se realiza una rotación de un ángulo θ.
- Se resuelve mediante composición de transformaciones



  - Se enuncian las transformaciones
  - Se determina el cálculo de cada una de ellas
  - Se explica como evaluar los ángulos requeridos

Rotación alrededor de un eje: composición de transformaciones



Rotación alrededor de un eje: relación de transformaciones

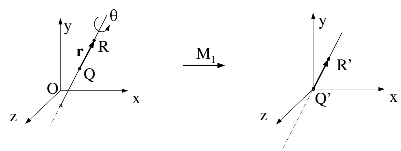
- La matriz de transformación es:
  - $M_{(Q,r)}(\theta) = M_7 \cdot M_6 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$
  - M_1 : traslación QO
  - M_2 : rotación α en z
  - M_3 : rotación β en x
  - M_4 : rotación θ en y
  - M_5 : rotación -β en x
  - M_6 : rotación -α en z
  - M_7 : traslación -QO

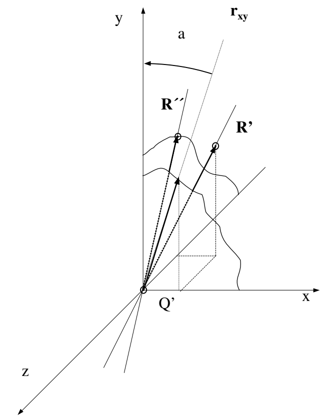
Rotación alrededor de un eje: M_1 - traslación QO

– Sea R tal que OR = OQ + r

– La traslación que lleva Q al origen es:

- $M_1 = M_T(-q_x, -q_y, -q_z)$





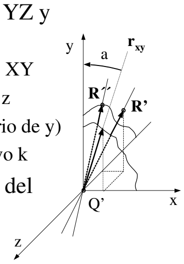
Rotación alrededor de un eje: M_2 - rotación α en z

– Calcular el ángulo α entre los planos YZ y el plano definido por el eje z y OR'

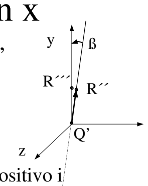
- $\mathbf{r_{xy}}$ es la proyección ortogonal de r sobre XY
- R'' es el resultado del giro alrededor de z
- α es el ángulo entre r_{xy} y j (vector unitario de y)
- tener en cuenta el sentido de giro positivo k

– M_2 es la matriz de rotación alrededor del eje z:

- $M_2 = M_{Rz}(\alpha)$



Rotación alrededor de un eje: M_3 - rotación ß en x



– Aplicando M_2 a R' se obtiene R''

- R'' está en el plano YZ
- r'' lo define OR''

– Calcular el ángulo ß entre r'' y j

- tener en cuenta el sentido de giro positivo i

– M_3 es la matriz de rotación alrededor del eje x:

- $M_3 = M_{Rx}(ß)$

Rotación alrededor de un eje: M_4 - rotación θ en y

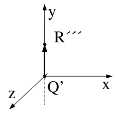
– Aplicando M_3 a R'' se obtiene R'''

- R''' está en el eje y

– Se realiza el giro θ en el eje y

– M_4 es la matriz de rotación alrededor del eje y:

- $M_4 = M_{Ry}(\theta)$



Rotación alrededor de un eje: M_5, M_6, M_7 - inversas

– Una vez calculado el giro θ alrededor del eje transformado, habrá que invertir el proceso de transformación y para ello se calculan las matrices inversas

- $M_5 = M_{Rx}(-ß)$
- $M_6 = M_{Rz}(-\alpha)$
- $M_7 = M_T(q_x, q_y, q_z)$

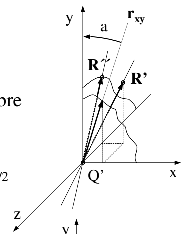
– La matriz de transformación compuesta es:

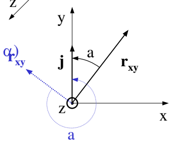
– $M_{(Q,\mathbf{r})}(\theta) = M_7 \cdot M_6 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$

Rotación alrededor de un eje: ángulo α

– Cálculo del ángulo α

- $\mathbf{r}_{xy}$ es la proyección ortogonal de r sobre el plano XY: $(r_x, r_y, 0)$
- $\cos \alpha = j \cdot \mathbf{r}_{xy} / | \mathbf{r}_{xy} | =$
  $= ((0, 1, 0) \cdot (r_x, r_y, 0)) / (r_x^2 + r_y^2)^{1/2}$
- $\cos \alpha = r_y / (r_x^2 + r_y^2)^{1/2}$
- Como $\cos \alpha = \cos (-\alpha)$, entonces
  – si $r_x < 0$ entonces el ángulo debe ser $(2\pi - \alpha)$
  $\Rightarrow \alpha = - \alpha$



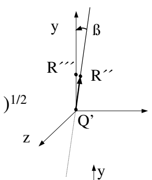


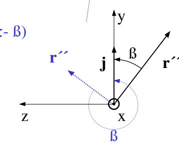
$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha = \mathrm{acos}\,(r_y / (r_x^2 + r_y^2)^{1/2})} \\ \textbf{y si } \boldsymbol{r_x < 0 \Rightarrow \alpha = - \alpha} \end{array}}$$

Rotación alrededor de un eje: ángulo ß

– Cálculo del ángulo ß

- R'' y r'' están en el plano YZ
- $\cos \beta = j \cdot r'' / | r''| =$
  $= ((0, 1, 0) \cdot (0, r_y'', r_z'')) / (r_y''^2 + r_z''^2)^{1/2}$
- $\cos \beta = r_y'' / (r_y''^2 + r_z''^2)^{1/2}$
- Como $\cos \beta = \cos (-\beta)$, entonces
  – si $r_z'' > 0$ entonces el ángulo debe ser $(2\pi - \beta)$
  $\Rightarrow \beta = - \beta$





$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{\beta = \mathrm{acos}\,(r_y'' / (r_y''^2 + r_z''^2)^{1/2})} \\ \textbf{y si } \boldsymbol{r_z'' > 0 \Rightarrow \beta = - \beta} \end{array}}$$