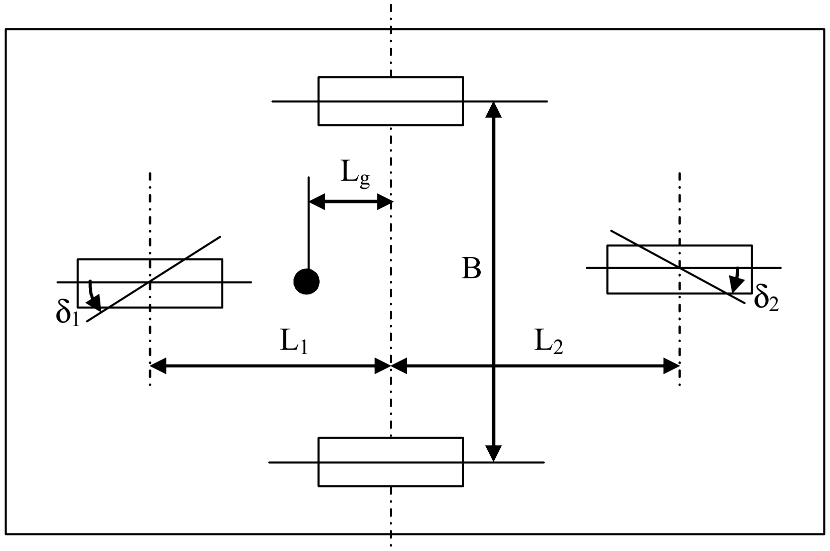
Un vehículo para transporte industrial posee la disposición de ruedas indicada en la figura. Son direccionables las ruedas situadas en ambos extremos del vehículo. La rigidez de deriva de los neumáticos es $C\alpha$

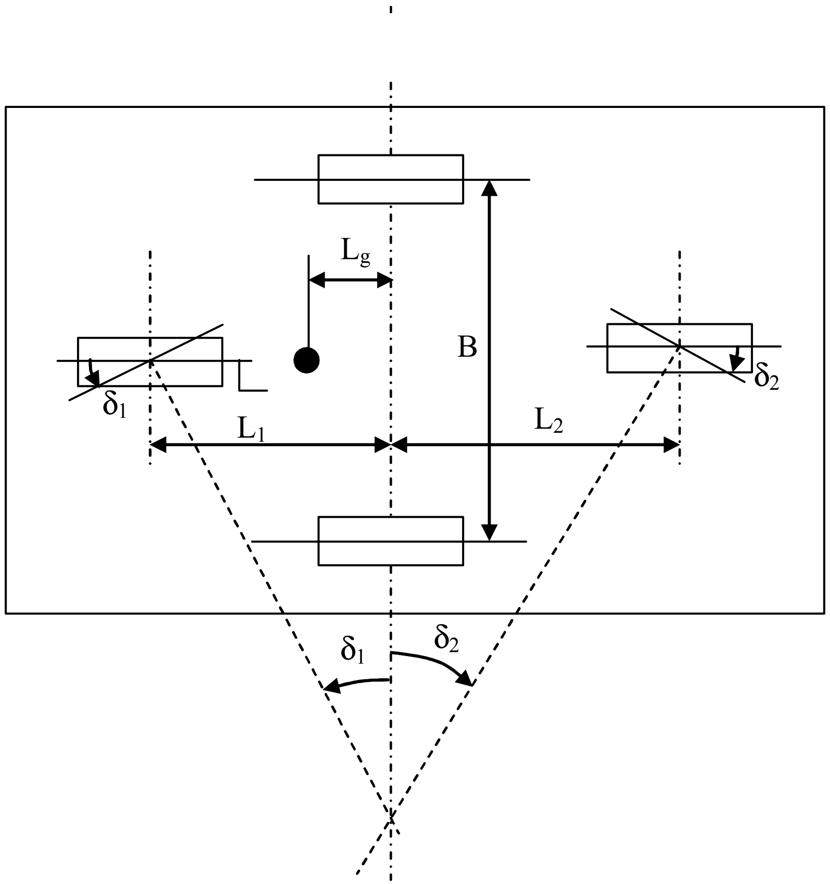
1. Definir la relación entre los ángulos girados por las ruedas y el radio de curva trazado a velocidad muy pequeña, indicar también la relación que deben cumplir ambos ángulos entre sí para evitar que se produzcan derivas en ninguna rueda.
2. Suponiendo que se mantiene la relación entre los ángulos de dirección de ambas ruedas definida en el apartado anterior, calcular la relación entre el ángulo girado por las ruedas y el radio de curva trazado por el vehículo en función de la velocidad, para ambos sentidos de circulación.
3. Particularizar los resultados anteriores para los siguientes datos del vehículo:

L1= 1 m, L2= 1,5 m, Lg=0,25, $C\alpha$= 1000 N/º, B=1,6, M=2000 Kg
indicando para cada sentido de marcha, cuales son los ángulos de dirección que deben girar las ruedas al recorrer una curva de 40 m de radio a una velocidad de 36 km/h. Indicar también para cada sentido si el vehículo es subvirador o sobrevirador definiendo respectivamente la velocidad característica o crítica.

$L1 := 1 \qquad L2 := 1.5 \qquad Lg := 0.25 \qquad C\alpha := 1000 \cdot \frac{180}{\pi} \qquad B := 1.6 \qquad M := 2000$

$R := 40 \qquad V := \frac{36}{3.6}$

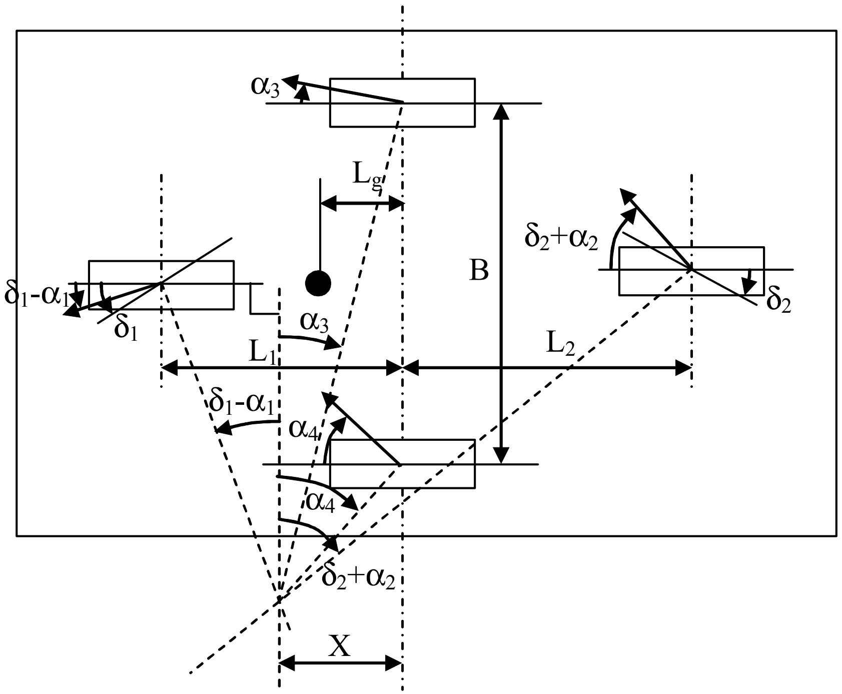




$\delta 1 = \frac{L1}{R}$ $\delta 2 = \frac{L2}{R}$

La relación entre δ1 y δ2 es: $\frac{\delta 1}{\delta 2} = \frac{L1}{L2}$

Ecuaciones en el caso en que V#0. Supondremos primero que el eje 1 es el eje de cabeza:



Ecuaciones geométricas:

$$\delta 1-\alpha 1=\frac{L1-X}{R} \qquad \alpha 3=\frac{X}{R}$$

$$\delta 2+\alpha 2=\frac{L2+X}{R}$$

O bien: $$\delta 1-\alpha 1+\alpha 3=\frac{L1}{R}$$

$$\delta 2+\alpha 2-\alpha 3=\frac{L2}{R}$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$C\alpha\cdot(\alpha 1+\alpha 2+2\cdot\alpha 3)=M\cdot\frac{V^2}{R}$$

$$C\alpha\cdot\alpha 1\cdot L1-M\cdot\frac{V^2}{R}\cdot Lg-C\alpha\cdot\alpha 2\cdot L2=0$$

Además: $$\delta 2=\frac{L2}{L1}\cdot\delta 1$$

Las ecuaciones resultan:

$$\delta 1-\alpha 1+\alpha 3=\frac{L1}{R}$$

$$\frac{L2}{L1}\cdot\delta 1+\alpha 2-\alpha 3=\frac{L2}{R}$$

$$\alpha 1+\alpha 2+2\cdot\alpha 3=\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}$$

$$\alpha 1\cdot L1-\alpha 2\cdot L2=\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}\cdot Lg$$

Resolviendo: $$\delta 1:=\frac{L1}{R}+\frac{(L2-L1+4\cdot Lg)\cdot L1}{\left(3\cdot L1^2+2\cdot L2\cdot L1+3\cdot L2^2\right)}\cdot\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}\qquad \delta 1=0.035$$

El resto de variables resultan:

$$\delta 2:=\frac{L2}{R}+\frac{(L2-L1+4\cdot Lg)\cdot L2}{\left(3\cdot L1^2+2\cdot L2\cdot L1+3\cdot L2^2\right)}\cdot\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}\qquad \delta 2=0.053$$

$$\alpha 1:=\frac{L2^2+L2\cdot Lg+L2\cdot L1+3\cdot L1\cdot Lg}{3\cdot L1^2+2\cdot L2\cdot L1+3\cdot L2^2}\cdot\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}\qquad \alpha 1=0.033$$

$$\alpha 2:=\frac{L1^2+L2\cdot L1-3\cdot L2\cdot Lg-L1\cdot Lg}{3\cdot L1^2+2\cdot L2\cdot L1+3\cdot L2^2}\cdot\frac{M}{C\alpha}\cdot\frac{V^2}{R}\qquad \alpha 2=7.7\cdot 10^{-3}$$

$$\alpha 3 := \frac{L1^2 + L2^2 + L2 \cdot Lg - L1 \cdot Lg}{3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \alpha 3 = 0.023$$

El coeficiente subvirador es:

$$Ksu := \frac{(L2 + 4 \cdot Lg - L1) \cdot L1}{3 \cdot L1^2 + 3 \cdot L2^2 + 2 \cdot L1 \cdot L2} \cdot \frac{M \cdot 9.81}{C\alpha} \qquad Ksu = 0.04$$

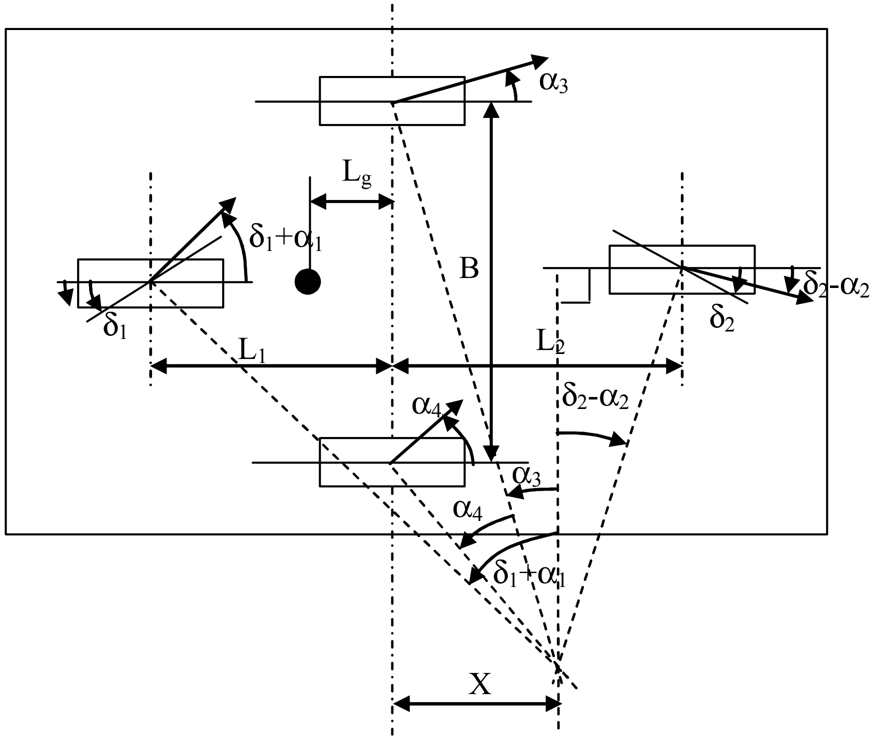
Cuando avanza con el eje 1 en cabeza es subvirador.

La fórmula del ángulo de dirección resulta: $\delta 1 = \frac{L1}{R} + Ksu \cdot \frac{V^2}{g \cdot R}$

Para la velocidad característica se cumple: $2 \cdot \frac{L1}{R} = \frac{L1}{R} + Ksu \cdot \frac{Vcar^2}{g \cdot R}$

Despejando Vcar: $Vcar := \sqrt{\frac{9.81 \cdot L1}{Ksu}}$ $\qquad Vcar \cdot 3.6 = 56.177$ Km/h

Resolvemos de nuevo el problema pero avanzando en sentido inverso (eje 2 en cabeza)



Ecuaciones geométricas:

$$\delta 1 + \alpha 1 = \frac{L1 + X}{R} \qquad \alpha 3 = \frac{X}{R}$$

$$\delta 2 - \alpha 2 = \frac{L2 - X}{R}$$

O bien:

$$\delta 1 + \alpha 1 - \alpha 3 = \frac{L1}{R}$$

$$\delta 2 - \alpha 2 + \alpha 3 = \frac{L2}{R}$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$C\alpha \cdot (\alpha 1 + \alpha 2 + 2 \cdot \alpha 3) = M \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$C\alpha \cdot \alpha 1 \cdot L1 - M \cdot \frac{V^2}{R} \cdot Lg - C\alpha \cdot \alpha 2 \cdot L2 = 0$$

Además:

$$\delta 2 = \frac{L2}{L1} \cdot \delta 1$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\delta 1 := \frac{L1}{R} + \left[\frac{\left(\frac{L1}{L2} - 1\right) - 4 \cdot \frac{Lg}{L2}}{2 + 3 \cdot \left(\frac{L2}{L1} + \frac{L1}{L2}\right)} \right] \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \delta 1 = 0.015$$

O bien:

$$\delta 1 := \frac{L1}{R} - \frac{(L2 - L1 + 4 \cdot Lg) \cdot L1}{\left(3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2\right)} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \delta 1 = 0.015$$

$$\delta 2 := \frac{L2}{R} - \frac{(L2 - L1 + 4 \cdot Lg) \cdot L2}{3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \delta 2 = 0.022$$

$$\alpha 1 := \frac{L2^2 + L2 \cdot Lg + L2 \cdot L1 + 3 \cdot L1 \cdot Lg}{3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \alpha 1 = 0.033$$

$$\alpha 2 := \frac{L1^2 + L2 \cdot L1 - 3 \cdot L2 \cdot Lg - L1 \cdot Lg}{3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \alpha 2 = 7.7 \bullet 10^{-3}$$

$$\alpha 3 := \frac{L1^2 + L2^2 + L2 \cdot Lg - L1 \cdot Lg}{3 \cdot L1^2 + 2 \cdot L2 \cdot L1 + 3 \cdot L2^2} \cdot \frac{M}{C\alpha} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad \alpha 3 = 0.023$$

Vemos que los ángulos de deriva tienen los mismos valores que cuando circulábamos en sentido contrario pero físicamente son diferentes ya que los ángulos y la cota X se han tomado en sentido contrario.

Coeficiente subvirador:

$$Ksu := \left[\frac{2\cdot\left(\frac{L1}{L2}-1\right)-8\cdot\frac{Lg}{L2}}{2+3\cdot\left(\frac{L2}{L1}+\frac{L1}{L2}\right)}\right]\cdot\frac{M\cdot 9.81}{2\cdot C\alpha} \qquad Ksu = -0.04$$

Esta expresión también puede ponerse como:

$$Ksu := -\left[\frac{(L2+4\cdot Lg-L1)\cdot L1}{3\cdot L1^2+3\cdot L2^2+2\cdot L1\cdot L2}\cdot\frac{M\cdot 9.81}{C\alpha}\right] \qquad Ksu = -0.04$$

Que es el mismo valor obtenido cuando circulaba en sentido contrario pero ahora con signo negativo.

La velocidad crítica la calculamos igualando a cero el ángulo de dirección, según la expresión:

$$\delta 1 = \frac{L1}{R}+Ksu\cdot\frac{V^2}{g\cdot R}$$

$$Vcrit := \sqrt{\frac{9.81\cdot L1}{-Ksu}} \qquad 3.6\cdot Vcrit = 56.177 \quad \text{Km/h}$$