Un automóvil posee la geometría indicada en la figura. Su equipo de freno aplica una proporción de esfuerzos de freno constante entre los ejes posterior y anterior para todos los niveles de esfuerzos aplicados al pedal de freno. La masa en condición de tara es 1350 Kg. La masa añadida para alcanzar la condición de carga máxima es 450 Kg. Las posiciones de los centros de gravedad de la masa correspondiente a la tara y a la masa añadida se indican en la misma figura.

1. Determinar
a) la proporción de esfuerzos de freno a aplicar a ambos ejes de forma que se consigan las mejores prestaciones de freno compatibles con que siempre se bloquee primero el eje anterior
b) Mínimas distancias de detención del coche desde 160 km/h en ambas condiciones de carretera húmeda (μ=0,25) y seca (μ=0,8) para las condiciones de tara y carga máxima

2. Con el coche en tara se dipone de datos correspondientes a dos situaciones:
a) circulación en recta con un esfuerzo de freno que provoca un deslizamiento de las ruedas en sentido longitudinal que son respectivamente:
eje anterior isf=14,252%
eje posterior isr= 5,858%

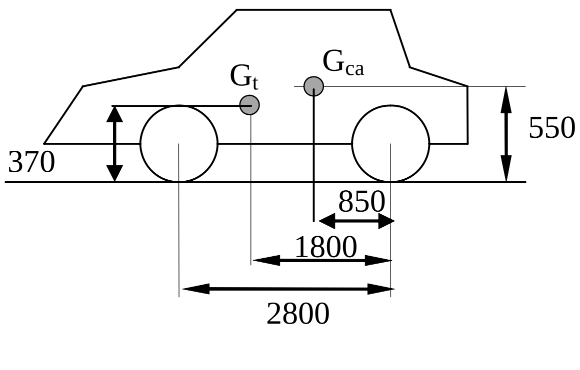
b)Circulación a 100 km/h por una curva de 180 m de radio. Los deslizamientos observados son:

eje anterior deslizamiento longitudinal isf= 20,044 deriva αf= 0.07651 rad
eje posterior deslizamiento longitudinal isr= 15,444 deriva $\alpha\rho$= 0.08439 rad

Determinar:
2.1. Fuerzas longitudinales y laterales en las ruedas anteriores y posteriores en ambas condiciones de circulación: en recta y en curva
2.2. el ángulo de dirección que deberán girar las ruedas para recorrer la curva en las condiciones descritas
2.3. Manteniendo los esfuerzos de freno calculados en 2.1, calcular la máxima velocidad a la que se podrá recorrer la curva sin que se pierda la adherencia en ninguna de las ruedas. Indicar si esa velocidad es a la que se pierde el control direccional
2.4. Carácter subvirador o sobrevirador frenando en recta y también frenando en curva en las condiciones descritas anteriormente

Fórmula de esfuerzos en los neumáticos: Dugoff et al. con los siguientes datos:

Factor de velocidad εr=0
Ci= 16.000 N, Cα=32.000 N



$Mt := 1350$ $Mc := 1800$ $Mca := 450$

1. Determinar la proporción de esfuerzos de freno a aplicar a ambos ejes de forma que en el caso de carretera seca (μ=0,8), tanto en tara como en carga, se obtenga la misma distancia de detención del coche.

$\mu := 0.8$

TARA:

Posición del c.d.g. $bt := 1$ $ct := 1.8$ $ht := 0.37$ $L := 2.8$

$Wfst := Mt \cdot 9.81 \cdot \frac{ct}{L}$ $\quad Wfst = 8.514 \cdot 10^3$ $\quad Wrst := Mt \cdot 9.81 \cdot \frac{bt}{L}$ $\quad Wrst = 4.73 \cdot 10^3$

Carga total: $\quad Wt := Wfst + Wrst$

Fórmulas de saturación del freno:

$$Fxmft(Fxr, \mu) := \frac{\mu \cdot \left(Wfst + \frac{ht}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxmrt(Fxf, \mu) := \frac{\mu \cdot \left(Wrst - \frac{ht}{L} \cdot Fxf\right)}{1 + \mu \cdot \frac{ht}{L}}$$

Saturación simultánea del rozamiento en ambos ejes:

$$Fxfit(\mu) := \mu \cdot \left(Wfst + \mu \cdot Wt \cdot \frac{ht}{L}\right) \qquad Fxrit(\mu) := \mu \cdot \left(Wrst - \mu \cdot Wt \cdot \frac{ht}{L}\right)$$

$Fxfit(0.8) = 7.931 \cdot 10^3$ $\quad Fxrit(0.8) = 2.664 \cdot 10^3$

CARGA:

Posición del c.d.g. $\quad bca := L - 0.85 \quad cca := 0.85 \quad hca := 0.55$

$$hc := \frac{ht \cdot Mt + hca \cdot Mca}{Mc} \qquad hc = 0.415 \qquad bc := \frac{bt \cdot Mt + bca \cdot Mca}{Mc} \qquad bc = 1.238$$

$$cc := \frac{ct \cdot Mt + cca \cdot Mca}{Mc} \qquad cc = 1.563$$

$$Wfsc := Wfst + Mca \cdot 9.81 \cdot \frac{cca}{L} \qquad Wrsc := Wrst + Mca \cdot 9.81 \cdot \frac{bca}{L}$$

Carga total: $\quad Wc := Wfsc + Wrsc \quad Wc = 1.766 \cdot 10^4$

Fórmulas de saturación del freno:

$$Fxmfc(Fxr, \mu) := \frac{\mu \cdot \left(Wfsc + \frac{hc}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}} \qquad Fxmrc(Fxf, \mu) := \frac{\mu \cdot \left(Wrsc - \frac{hc}{L} \cdot Fxf\right)}{1 + \mu \cdot \frac{hc}{L}}$$

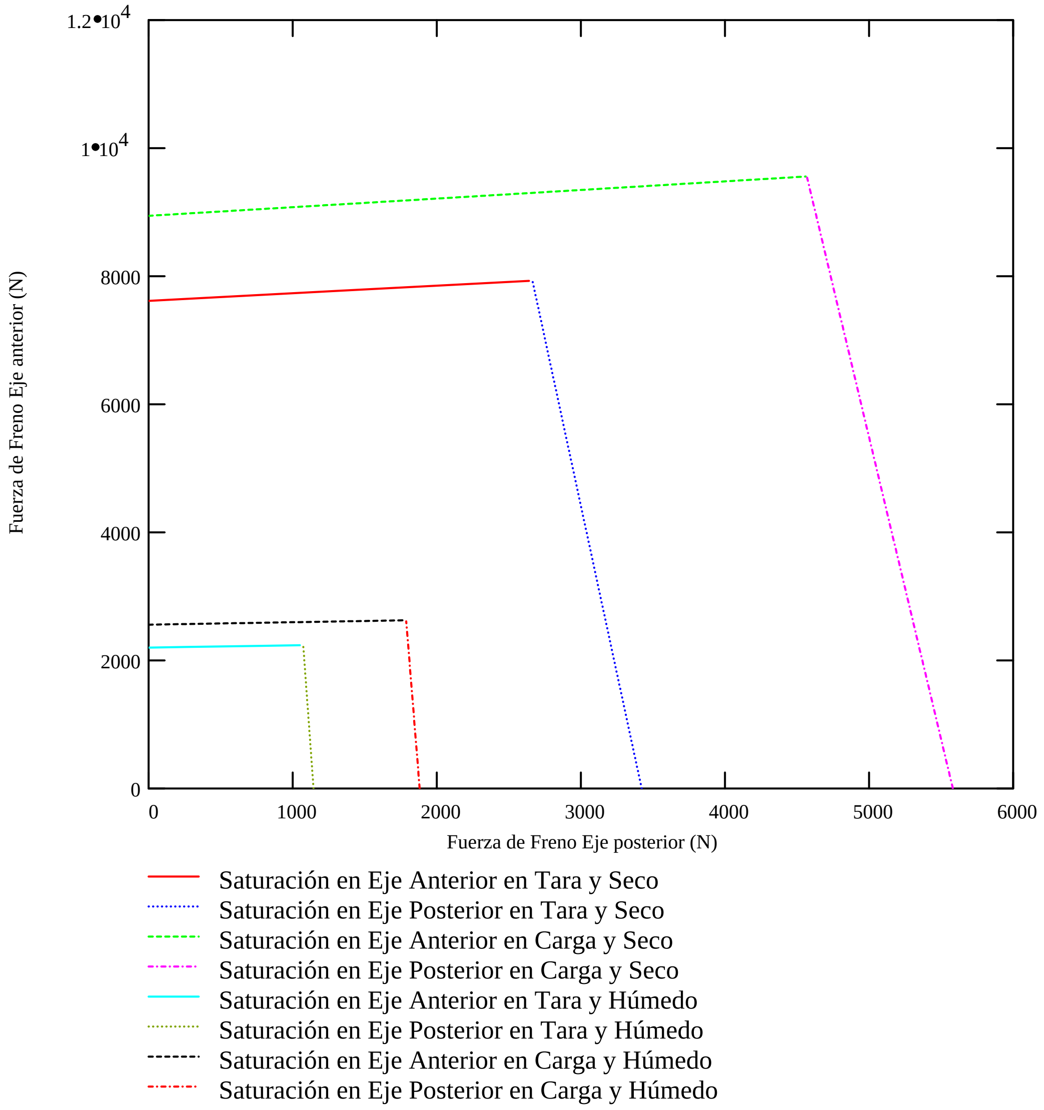
Saturación simultánea del rozamiento en ambos ejes:

$$Fxfic(\mu) := \mu \cdot \left(Wfsc + \mu \cdot Wc \cdot \frac{hc}{L}\right) \qquad Fxric(\mu) := \mu \cdot \left(Wrsc - \mu \cdot Wc \cdot \frac{hc}{L}\right)$$

Representación de las curvas de saturación:

$Fxrcs := 0, 30 .. Fxric(0.8)$ $\quad Fxfcs := 0, 30 .. Fxfic(0.8)$ $\quad Fxrch := 0, 30 .. Fxric(0.25)$ $\quad Fxfch := 0, 30 .. Fxfic(0.25)$

$Fxrts := 0, 30 .. Fxrit(0.8)$ $\quad Fxfts := 0, 30 .. Fxfit(0.8)$ $\quad Fxrth := 0, 30 .. Fxrit(0.25)$ $\quad Fxfth := 0, 30 .. Fxfit(0.25)$



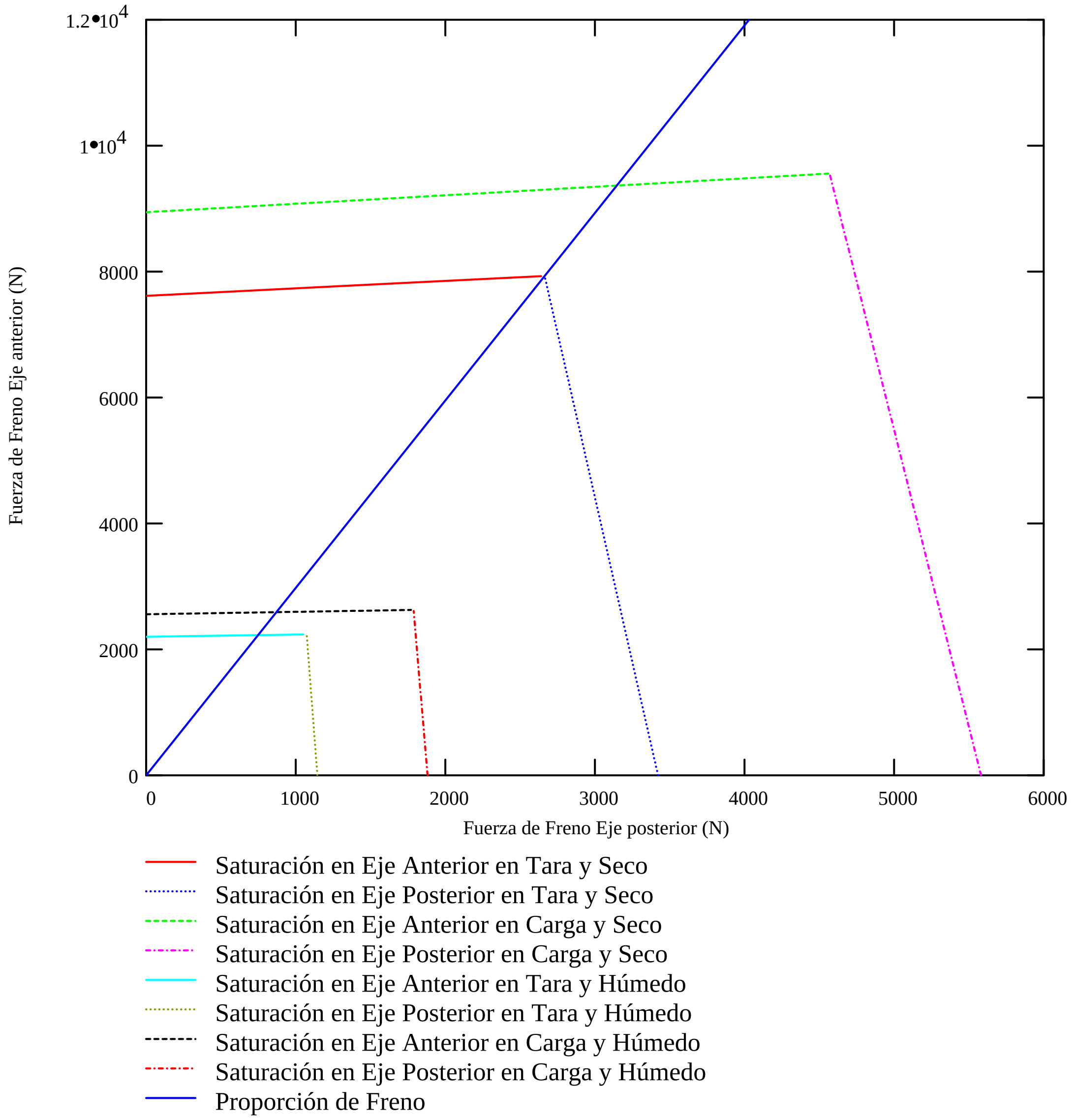
la curva de reparto de freno que proporciona máximas prestaciones sin que se bloquee el eje posterior es la que pasa por el punto óptimo de tara con carretera secaa, intersección entre las rectas azul y roja

Calculamos dicha intersección:

Condiciones a cumplir

$Fxf = Kfr \cdot Fxr$ recta de proporción de freno

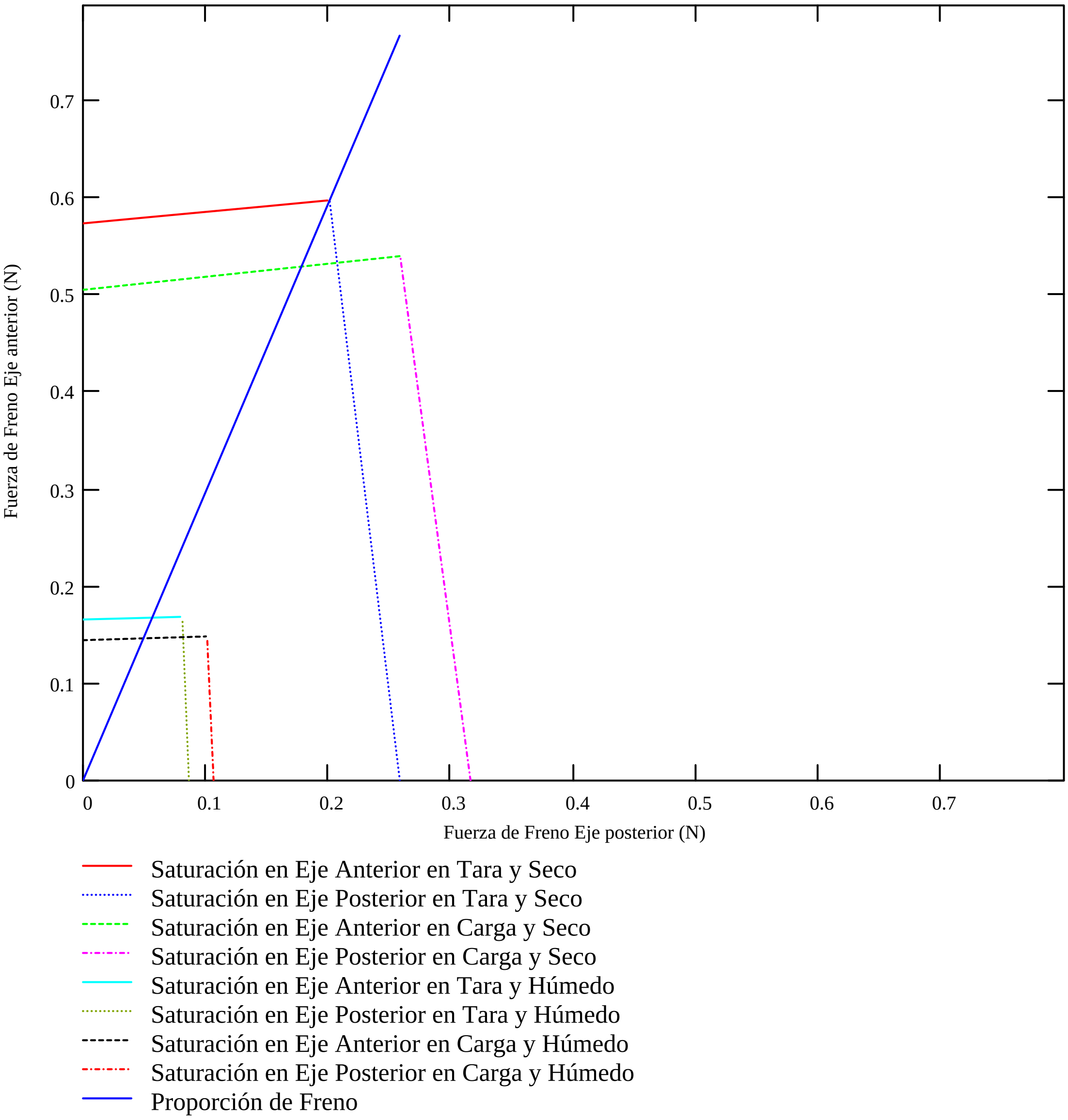
$$Kfr := \frac{Fxfit(0.8)}{Fxrit(0.8)}$$



$1.2 \cdot 10^4$
$1 \cdot 10^4$
8000
6000
4000
2000
0
Fuerza de Freno Eje anterior (N)
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
Fuerza de Freno Eje posterior (N)
Saturación en Eje Anterior en Tara y Seco
Saturación en Eje Posterior en Tara y Seco
Saturación en Eje Anterior en Carga y Seco
Saturación en Eje Posterior en Carga y Seco
Saturación en Eje Anterior en Tara y Húmedo
Saturación en Eje Posterior en Tara y Húmedo
Saturación en Eje Anterior en Carga y Húmedo
Saturación en Eje Posterior en Carga y Húmedo
Proporción de Freno

Mínimas distancias de detención del coche en condiciones de carreteras húmeda (μ=0,25) y seca (μ=0,8) en tara y carga máxima:

Representación de las curvas de saturación en forma de aceleraciones:



En todos los casos se bloquean primero las ruedas del eje delantero. Las rectas de bloqueo del freno en el eje delatero responden a las expresiones:

Carretera húmeda: $\mu := 0.25$

$$Fxmft = \frac{\mu \cdot \left(Wfst + \frac{ht}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxmfc = \frac{\mu \cdot \left(Wfsc + \frac{hc}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}}$$

Condición de tara:

$$Kfr \cdot Fxrt = \frac{\mu \cdot \left(Wfst + \frac{ht}{L} \cdot Fxrt\right)}{1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxrt := \frac{\mu \cdot Wfst}{Kfr \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}\right) - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxft := Kfr \cdot Fxrt$$

Deceleración: $Axt := \frac{Fxft + Fxrt}{Mt}$ $\qquad Axt = 2.203$

Distancia de parada: $V := \frac{160}{3.6}$ $Dpt := \frac{V^2}{2 \cdot Axt}$ $Dpt = 448.242$ m

Condición de carga:

$$Kfr \cdot Fxrc = \frac{\mu \cdot \left(Wfsc + \frac{ht}{L} \cdot Fxrc\right)}{1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}} \qquad Fxrc := \frac{\mu \cdot Wfsc}{Kfr \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}\right) - \mu \cdot \frac{hc}{L}} \qquad Fxfc := Kfr \cdot Fxrc$$

Deceleración: $Axc := \frac{Fxfc + Fxrc}{Mc}$ $Axc = 1.923$

Distancia de parada: $V := \frac{160}{3.6}$ $Dpc := \frac{V^2}{2 \cdot Axc}$ $Dpc = 513.476$ m

Carretera seca: $\mu := 0.8$

$$Fxmft = \frac{\mu \cdot \left(Wfst + \frac{ht}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxmfc = \frac{\mu \cdot \left(Wfsc + \frac{hc}{L} \cdot Fxr\right)}{1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}}$$

Condición de tara:

$$Kfr \cdot Fxrt = \frac{\mu \cdot \left(Wfst + \frac{ht}{L} \cdot Fxrt\right)}{1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxrt := \frac{\mu \cdot Wfst}{Kfr \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{ht}{L}\right) - \mu \cdot \frac{ht}{L}} \qquad Fxft := Kfr \cdot Fxrt$$

Deceleración: $Axt := \frac{Fxft + Fxrt}{Mt}$ $Axt = 7.848$

Distancia de parada: $V := \frac{160}{3.6}$ $Dpt := \frac{V^2}{2 \cdot Axt}$ $Dpt = 125.848$ m

Condición de carga:

$$Kfr \cdot Fxrc = \frac{\mu \cdot \left(Wfsc + \frac{ht}{L} \cdot Fxrc\right)}{1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}} \qquad Fxrc := \frac{\mu \cdot Wfsc}{Kfr \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{hc}{L}\right) - \mu \cdot \frac{hc}{L}} \qquad Fxfc := Kfr \cdot Fxrc$$

Deceleración: $Axc := \frac{Fxfc + Fxrc}{Mc}$ $Axc = 6.952$

Distancia de parada: $V := \frac{160}{3.6}$ $Dpc := \frac{V^2}{2 \cdot Axc}$ $Dpc = 142.077$ m

2. Con el coche en tara se dipone de datos correspondientes a dos situaciones:
a) circulación en recta con un esfuerzo de freno que provoca un deslizamiento de las ruedas en sentido longitudinal que son respectivamente:
eje anterior isf=14,252%
eje posterior isr= 5,858%

b)Circulación a 100 km/h por una curva de 180 m de radio. Los deslizamientos observados son:

eje anterior deslizamiento longitudinal isf= 20,044 deriva αf= 0.07651 rad
eje posterior deslizamiento longitudinal isr= 15,444 deriva $\alpha\rho$= 0.08439 rad

Determinar:
2.1. Fuerzas longitudinales y laterales en las ruedas anteriores y posteriores en ambas condiciones de circulación: en recta y en curva
2.2. el ángulo de dirección que deberán girar las ruedas para recorrer la curva en las condiciones descritas
2.3. Manteniendo los esfuerzos de freno calculados en 2.1, calcular la máxima velocidad a la que se podrá recorrer la curva sin que se pierda la adherencia en ninguna de las ruedas. Indicar si esa velocidad es a la que se pierde el control direccional
2.4. Carácter subvirador o sobrevirador frenando en recta y también frenando en curva en las condiciones descritas anteriormente

$Ci := 16000$ $\quad C\alpha := 32000$ $\quad R := 180$ $\quad V := \frac{100}{3.6}$ $\quad \mu := 0.8$

$isf\_recta := 0.14252$ $\quad isr\_recta := 0.05858$

$isf\_curva := 0.20044$ $\quad isr\_curva := 0.15444$ $\quad \alpha f\_curva := 0.07651$ $\quad \alpha r\_curva := 0.08439$

Aplicamos las fórmulas de Dugoff:

$\varepsilon r := 0$

$$s(N, is, \alpha) := \frac{\mu \cdot N \cdot \left(1 - \varepsilon r \cdot V \cdot \sqrt{is^2 + \tan(\alpha)^2}\right) \cdot (1 - is)}{2 \cdot \sqrt{Ci^2 \cdot is^2 + C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha)^2}}$$

$$f(N, is, \alpha) := \mathrm{if}(s(N, is, \alpha) < 1, s(N, is, \alpha) \cdot (2 - s(N, is, \alpha)), 1)$$

$$Fx(N, is, \alpha) := \frac{Ci \cdot is}{1 - is} \cdot f(N, is, \alpha) \qquad Fy(N, is, \alpha) := \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot f(N, is, \alpha)$$

Derivadas de las fórmulas de Dugoff para εr=0

$$s = \frac{\mu \cdot N \cdot (1 - is)}{2 \cdot \sqrt{Ci^2 \cdot is^2 + C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha)^2}}$$

$$\frac{d}{d\alpha} s = \frac{-1}{2} \cdot \frac{\mu \cdot N \cdot (1 - is) \cdot \left[C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha) \cdot \left(1 + \tan(\alpha)^2\right)\right]}{\left(Ci^2 \cdot is^2 + C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha)^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Para deslizamientos altos s<1

$$Fy = \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot s \cdot (2 - s)$$

$$\frac{d}{d\alpha} Fy = C\alpha \cdot \frac{\left(1 + \tan(\alpha)^2\right)}{(1 - is)} \cdot s \cdot (2 - s) + \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot \left[(2 - s) \cdot \frac{d}{d\alpha} s - s \cdot \frac{d}{d\alpha} s\right]$$

$$\frac{d}{d\alpha} Fy = C\alpha \cdot \frac{\left(1 + \tan(\alpha)^2\right)}{(1 - is)} \cdot s \cdot (2 - s) + \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot (2 - 2 \cdot s) \cdot \frac{d}{d\alpha} s$$

$$\frac{d}{d\alpha} Fy = C\alpha \cdot \frac{\left(1 + \tan(\alpha)^2\right)}{(1 - is)} \cdot s \cdot (2 - s) - \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot (1 - s) \cdot \left[\frac{\mu \cdot N \cdot (1 - is) \cdot \left[C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha) \cdot \left(1 + \tan(\alpha)^2\right)\right]}{\left(Ci^2 \cdot is^2 + C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha)^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right]$$

Expresión de la derivada de la fuerza lateral respecto de α:

$$dFy\_\alpha(s, N, is, \alpha) := \text{if}\left[s < 1, C\alpha \cdot \frac{s \cdot (2 - s)}{(1 - is) \cdot \cos(\alpha)^2} - \frac{C\alpha \cdot \tan(\alpha)}{1 - is} \cdot (1 - s) \cdot \left[\frac{\mu \cdot N \cdot (1 - is) \cdot C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha) \cdot \left(1 + \tan(\alpha)^2\right)}{2 \cdot \left(Ci^2 \cdot is^2 + C\alpha^2 \cdot \tan(\alpha)^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right], C\alpha \cdot \frac{1 + \tan(\alpha)^2}{(1 - is)}\right]$$

Esta es la expresión de la rigidez tangencial de deriva

Determinamos las fuerzas Fx y Fy:

Para ello tenemos en cuenta la transferencia de peso DW del eje posterior al anterior debido a la fuerza de inercia asociada a la deceleración Ax

Circulación en recta (Valores de prueba para iterar): $Dx := 5$ $DW := 0$

Given

$$Dx = 2 \cdot \frac{Fx\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_recta, 0\right) + Fx\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_recta, 0\right)}{Mt}$$

$$DW = Mt \cdot Dx \cdot \frac{ht}{L}$$

$$D := \text{Minerr}(Dx, DW)$$

$Dxr := D_0$ $DWr := D_1$

$Dxr = 5$ m/s2 $DWr = 891.958$ N

Las fuerzas Fx y Fy resultan:

Eje delantero: $Fx\left(\frac{Wfst + DWr}{2}, isf\_recta, 0\right) = 2.432 \cdot 10^3$ N/rueda

$Fy\left(\frac{Wfst + DWr}{2}, isf\_recta, 0\right) = 0$ N/rueda

Eje posterior: $Fx\left(\frac{Wrst - DWr}{2}, isr\_recta, 0\right) = 943.375$ N/rueda

$Fy\left(\frac{Wrst - DWr}{2}, isr\_recta, 0\right) = 0$ N/rueda

Las rigideces de deriva tangencial resultan:

$$C\alpha ft\_recta := dFy\_\alpha\left(s\left(\frac{Wfst + DWr}{2}, isf\_recta, 0\right), \frac{Wfst + DWr}{2}, isf\_recta, 0\right) \qquad C\alpha ft\_recta = 3.412 \cdot 10^{4}$$

$$C\alpha rt\_recta := dFy\_\alpha\left(s\left(\frac{Wrst - DWr}{2}, isr\_recta, 0\right), \frac{Wrst - DWr}{2}, isr\_recta, 0\right) \qquad C\alpha rt\_recta = 3.221 \cdot 10^{4}$$

Coeficiente subvirador tangencial:

$$Ksvt\_recta := \frac{Wfst}{2 \cdot C\alpha ft\_recta} - \frac{Wrst}{2 \cdot C\alpha rt\_recta} \qquad Ksvt\_recta = 0.051$$ rad/g (Subvirador)

Circulación en Curva:

Determinamos las fuerzas Fx y Fy:

$Dx := 5$ $\quad DW := 0$ Valores iniciales para iterar

Given

$$Dx = 2 \cdot \frac{Fx\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right) + Fx\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right)}{Mt}$$

$$DW = Mt \cdot Dx \cdot \frac{ht}{L}$$

$$D := Minerr(Dx, DW)$$

$Dx := D_0$ $\quad DW := D_1$ $\quad Dx = 5$ $\quad DW = 891.977$

Las fuerzas Fx y Fy resultan:

Eje delantero: $Fx\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right) = 2.432 \cdot 10^{3}$ N/rueda

$Fy\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right) = 1.86 \cdot 10^{3}$ N/rueda

Eje posterior: $Fx\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right) = 943.348$ N/rueda

$Fy\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right) = 1.033 \cdot 10^{3}$ N/rueda

$$C\alpha ft\_curva := dFy\_\alpha\left(s\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right), \frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right)$$

$$C\alpha ft\_curva = 2.093 \cdot 10^{4}$$

$$C\alpha rt\_curva := dFy\_\alpha\left(s\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right), \frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right)$$

$$C\alpha rt\_curva = 9.274 \cdot 10^{3}$$

$$Ksvt\_curva := \frac{Wfst}{2 \cdot C\alpha ft\_curva} - \frac{Wrst}{2 \cdot C\alpha rt\_curva} \qquad Ksvt\_curva = -0.052$$ Sobrevirador

Debido a la descarga que se produce en las ruedas posteriores, aumenta el ángulo de deriva en el eje posterior y el vehículo tiende a ser sobrevirador. (Puede comprobarse que las fuerzas laterales que absorbe cada eje son proporcionales a sus cargas verticales estáticas)

$$\frac{2 \cdot Fy\left(\frac{Wfst + DW}{2}, isf\_curva, \alpha f\_curva\right)}{Wfst} = 0.437 \qquad \frac{2 \cdot Fy\left(\frac{Wrst - DW}{2}, isr\_curva, \alpha r\_curva\right)}{Wrst} = 0.437$$

Por tanto la circulación en curva se realiza con una aceleración no compensada de 0,437 g

$$\frac{\left(\frac{100}{3.6}\right)^{2}}{180 \cdot 9.81} = 0.437$$

Angulo de dirección que hay que girar las ruedas:

$$\delta := \frac{L}{R} + \alpha f\_curva - \alpha r\_curva \qquad \delta = 7.676 \cdot 10^{-3}$$ rad

Este valor es muy inferior al correspondiente a condiciones cuasiestáticas: $\frac{L}{R} = 0.016$

2.3. Manteniendo los esfuerzos de freno calculados en 2.1, calcular la máxima velocidad a la que se podrá recorrer la curva sin que se pierda la adherencia en ninguna de las ruedas. Indicar si esa velocidad es a la que se pierde el control direccional

$Fxf := 2431.602$ N/rueda $\qquad Fxr := 943.375$ N/rueda

$Fyf(V) := \frac{Mt}{2} \cdot \frac{V^{2}}{R} \cdot \frac{ct}{L}$ N/rueda $\qquad Fyr(V) := \frac{Mt}{2} \cdot \frac{V^{2}}{R} \cdot \frac{bt}{L}$ N/rueda

En el eje delantero la condición de pérdida de adherencia se produce:

$$\sqrt{Fxf^{2} + \left(\frac{Mt}{2} \cdot \frac{V^{2}}{R} \cdot \frac{ct}{L}\right)^{2}} = \mu \cdot \frac{Wfst + DWr}{2}$$

Siendo: $DWr = 891.958$

$$V := \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot R}{ct \cdot Mt} \cdot \sqrt{\left(\mu \cdot \frac{Wfst + DWr}{2}\right)^{2} - Fxf^{2}}} \qquad V \cdot 3.6 = 124.233$$

En el eje posterior la condición de pérdida de adherencia se produce:

$$\sqrt{Fxr^2 + \left(\frac{Mt}{2}\cdot\frac{V^2}{R}\cdot\frac{bt}{L}\right)^2} = \mu\cdot\frac{Wrst - DWr}{2}$$

$$V := \sqrt{\frac{2\cdot L\cdot R}{bt\cdot Mt}\cdot\sqrt{\left(\mu\cdot\frac{Wrst - DWr}{2}\right)^2 - Fxr^2}} \qquad V\cdot 3.6 = 108.256$$

Resulta más crítico el eje posterior por tanto la máxima velocidad a la que podrá recorrerse la curva sin agotar la adherencia será:

$V\cdot 3.6 = 108.256$ km/h