Un VW Polo GTI cuando está cargado al límite de su capacidad su masa es 1700 Kg. Sus dimensiones y posición del centro de gravedad son las indicadas en la figura adjunta. La curva par-velocidad puede ajustarse mediante un polinomio de segundo orden según la expresión $-23.717 + 0.115 \cdot \Omega v - 1.37 \cdot 10^{-5} \cdot \Omega v^2$. El rango de velocidades de utilización está comprendido entre 1700 y 6800 rpm. Las relaciones de transmisión a las 4 velocidades disponibles son:

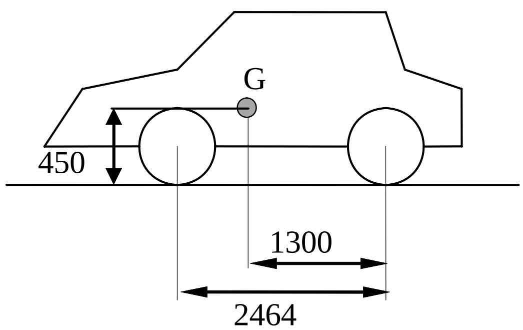
Relaciones de transmisión de la caja de velocidades, el término 0 es la marcha atrás:

$$r := \begin{bmatrix} 3.06 \\ 3.3 \\ 1.94 \\ 1.36 \\ 1.03 \\ 0.82 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Marcha atrás} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a \\ 5^a \end{array} \qquad r = \begin{bmatrix} 3.06 \\ 3.3 \\ 1.94 \\ 1.36 \\ 1.03 \\ 0.82 \end{bmatrix}$$

Reducción en el diferencial $rd := 3.65$ $rd = 3.65$

Perímetro circunferencial de las ruedas: $Circunf := 2.09$ $R\_rueda := \frac{Circunf}{2 \cdot \pi}$ $R\_rueda = 0.333$

1. Representar la fuerza tractora en el vehículo para cada una de las marchas. Comparar la relación de marchas con una establecida en progresión geométrica, manteniendo las relaciones de transmisión en 1ª y 5ª. ¿Qué diferencias se observan?
2. Determinar las velocidades a las que se deberá cambiar de marchas para alcanzar la máxima velocidad en el mínimo tiempo.
3. Con qué aceleración máxima podremos arrancar en una rampa de un 15%?. ¿Qué revoluciones llevará el motor?, ¿Qué deslizamiento se producirá en el embrague?. ¿Qué coeficiente de rozamiento mínimo será necesario en las ruedas?.
4. ¿A qué velocidad mínima podremos levantar el pié del embrague arrancando en horizontal? ¿Qué aceleración tendrá el coche en esa situación?



$M := 1700$ $L := 2.464$ $L2 := 1.3$ $L1 := L - L2$

$h := 0.450$ $L1 = 1.164$

$$T(\Omega) := -23.717 + 0.115 \cdot \Omega - 1.37 \cdot 10^{-5} \cdot \Omega^2$$

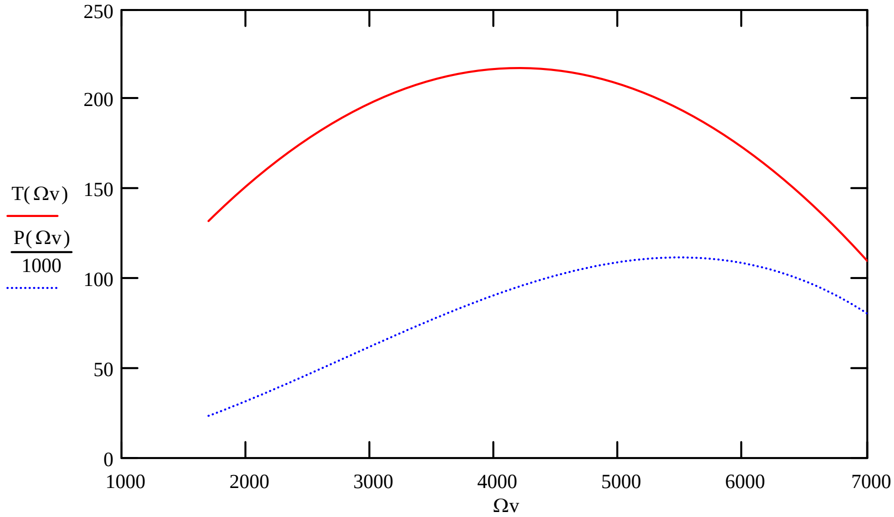
Derivando e igualando a cero obtenemos la velocidad de par máximo: $\Omega tmax := 4197.0802919708029197 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}$

El par máximo es: $Tmax := T\left(\Omega tmax \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi}\right)$ $Tmax = 217.615$

La potencia es: $P(\Omega) := \left(-23.717 + 0.115 \cdot \Omega - 1.37 \cdot 10^{-5} \cdot \Omega^2\right) \cdot \Omega \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}$ $A := \begin{bmatrix} -1.37 \cdot 10^{-5} \\ 0.115 \\ -23.717 \end{bmatrix}$

Representación de la curva de par y de potencia:

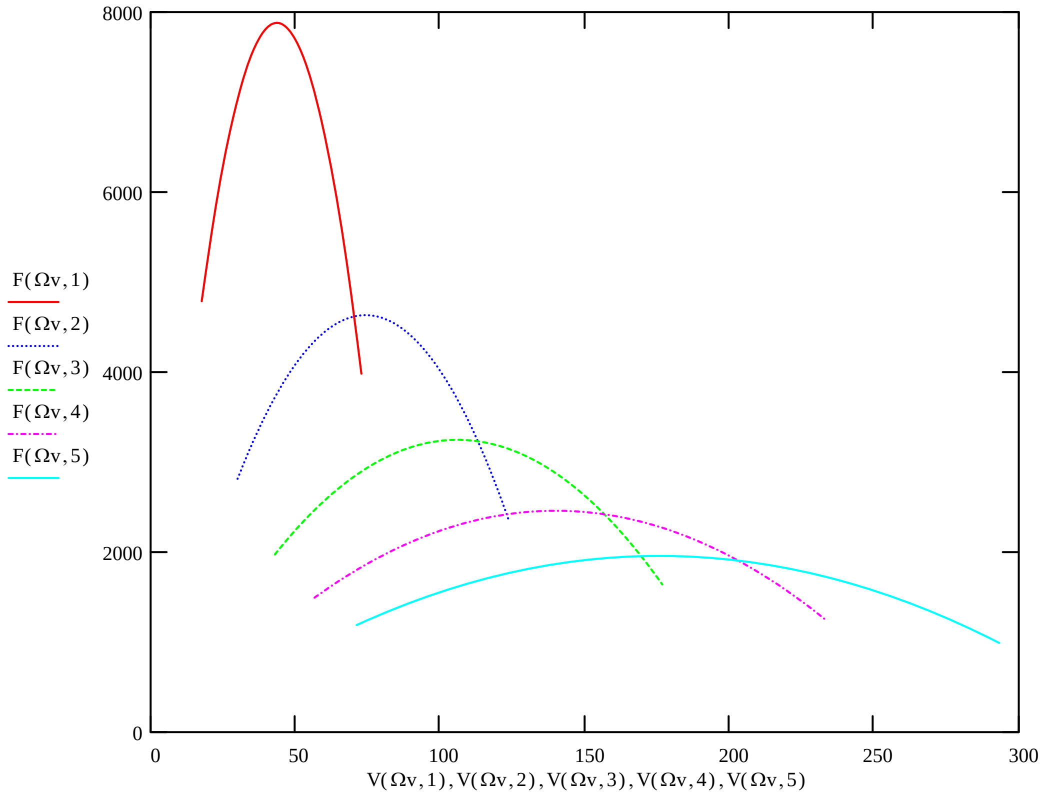
$\Omega v := 1700, 1710 .. 7000$



Funciones de velocidad del vehículo y del esfuerzo tractor en función de la velocidad del motor a cada marcha n

$$V(\Omega, n) := \Omega \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot \frac{R\_rueda}{r_n \cdot rd} \cdot 3.6 \qquad F(\Omega, n) := T(\Omega) \cdot \frac{r_n \cdot rd}{R\_rueda}$$

Curvas Fuerza tractora (Newton) - Velocidad del vehículo (km/h)



Velocidades de cambio de marcha para máximas prestaciones:

Se producen en los puntos de corte de las curvas correspondientes a marchas sucesivas:

La velocidad de giro del motor a una velocidad V puede expresarse:

$$\Omega = \frac{V \cdot r_{n+1} \cdot rd}{R\_rueda}$$

Igualamos esfuerzos tractores para una misma velocidad de avance en ambas marchas

$$Tm\left(\frac{V \cdot r_{n+1} \cdot rd}{R\_rueda}\right) \cdot \frac{r_{n+1} \cdot rd}{R\_rueda} = Tm\left(\frac{V \cdot r_n \cdot rd}{R\_rueda}\right) \cdot \frac{r_n \cdot rd}{R\_rueda}$$

Esta ecuación puede ponerse en la forma

$$Tm\left(\frac{V \cdot r_{n+1} \cdot rd}{R\_rueda}\right) = \frac{r_n}{r_{n+1}} \cdot Tm\left(\frac{V \cdot r_n \cdot rd}{R\_rueda}\right)$$ o bien: $$Tm(\omega) - \frac{r_n}{r_{n+1}} \cdot Tm\left(\omega \cdot \frac{r_n}{r_{n+1}}\right) = 0$$

Denominando $k = \frac{r_n}{r_{n+1}}$ y sustituyendo la expresión del par motor

$$A_0 \cdot \Omega^2 + A_1 \cdot \Omega + A_2 - k \cdot \left[A_0 \cdot (\Omega \cdot k)^2 + A_1 \cdot \Omega \cdot k + A_2\right] = 0$$

o bien: $$A_0 \cdot \Omega^2 \cdot \left(1 - k^3\right) + A_1 \cdot \Omega \cdot \left(1 - k^2\right) + A_2 \cdot (1 - k) = 0$$

La velocidad del motor (correspondiente a la marcha más alta) a la que se produce la intersección entre las fuerzas tractoras correspondientes a dos marchas es:

$$\Omega\_cambio(k) := -\frac{A_1 \cdot \left(1 - k^2\right)}{2 \cdot A_0 \cdot \left(1 - k^3\right)} + \sqrt{\left[\frac{A_1 \cdot \left(1 - k^2\right)}{2 \cdot A_0 \cdot \left(1 - k^3\right)}\right]^2 - \frac{A_2 \cdot (1 - k)}{A_0 \cdot \left(1 - k^3\right)}}$$

$$\Omega\_cambio\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 3.975 \cdot 10^3$$ $$V(i,j) := \Omega\_cambio\left(\frac{r_i}{r_j}\right) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot \frac{R\_rueda}{r_j \cdot rd} \cdot 3.6$$

$V(1,2) = 70.392$ $V(2,3) = 113.145$ $V(3,4) = 156.85$ $V(4,5) = 203.057$

Representación Fuerza tractora-Velocidad de avance:

Las relaciones de transmisión globales son:

$$\xi1 := \frac{r_1 \cdot rd}{R\_rueda} \qquad \xi2 := \frac{r_2 \cdot rd}{R\_rueda} \qquad \xi3 := \frac{r_3 \cdot rd}{R\_rueda} \qquad \xi4 := \frac{r_4 \cdot rd}{R\_rueda} \qquad \xi5 := \frac{r_5 \cdot rd}{R\_rueda}$$

$$\Omega ef\_max := 6800 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \qquad \Omega ef\_min := 1700 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}$$

Las velocidades de cambio agotando la máxima velocidad del motor resultarían:

$V12 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 1}$ $V12 \cdot 3.6 = 70.795$ km/h $V23 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 2}$ $V23 \cdot 3.6 = 120.424$ km/h

$V34 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 3}$ $V34 \cdot 3.6 = 171.781$ km/h $V45 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 4}$ $V45 \cdot 3.6 = 226.817$ km/h

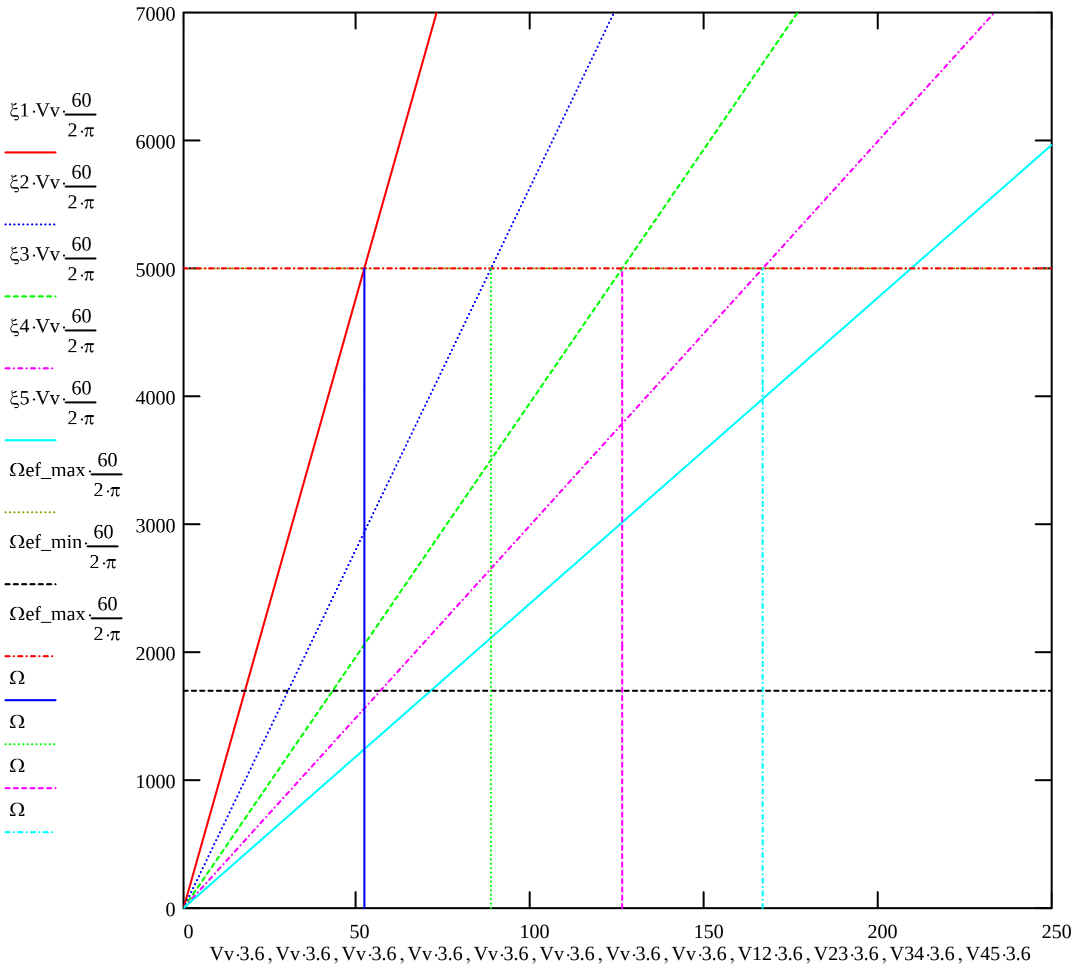
Si consideramos como velocidad de motor máxima recomendada 5000 rpm, las velocidades de cambio agotando la máxima velocidad recomendada del motor resultarían:

$$\Omega ef\_max := 5000 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}$$

$V12 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 1}$ $V12 \cdot 3.6 = 52.058$ km/h $V23 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 2}$ $V23 \cdot 3.6 = 88.547$ km/h

$V34 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 3}$ $V34 \cdot 3.6 = 126.309$ km/h $V45 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 4}$ $V45 \cdot 3.6 = 166.777$ km/h

$Vv := 0, 0.1 .. \frac{250}{3.6}$ $\Omega := 0, 1 .. \Omega ef\_max \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi}$



Vemos que las velocidades inferiores exigen utilizar velocidades del motor cada vez más bajas

Relaciones de marcha en progresión geométrica:

Para obtener relaciones de marcha en progresión geométrica se debe cumplir:

$$\xi 1 = k \cdot \xi 2 = k^2 \cdot \xi 3 = k^3 \cdot \xi 4 = k^4 \cdot \xi 5$$

Por tanto: $k := \sqrt[4]{\frac{\xi 1}{\xi 5}}$ $k = 1.416$ De donde:

$\xi 2 := \frac{\xi 1}{k}$ $\xi 2 = 25.566$ $\xi 3 := \frac{\xi 2}{k}$ $\xi 3 = 18.051$

$\xi 4 := \frac{\xi 3}{k}$ $\xi 4 = 12.744$ $\xi 5 := \frac{\xi 4}{k}$ $\xi 5 = 8.998$

De esta forma la velocidad del motor a la que podremos realizar el cambio a una marcha inferior es:

$\frac{\Omega ef\_min}{\xi_i} = \frac{\Omega ef\_max}{\xi_{i-1}}$ o bien: $\Omega ef\_min = \Omega ef\_max \cdot \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}} = \frac{\Omega ef\_max}{k}$

Podemos considerar como velocidad máxima recomendada del motor $\Omega ef\_max := 5000 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}$

$\Omega ef\_min := \frac{\Omega ef\_max}{k}$ $\Omega ef\_min \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi} = 3.53 \cdot 10^3$ rpm

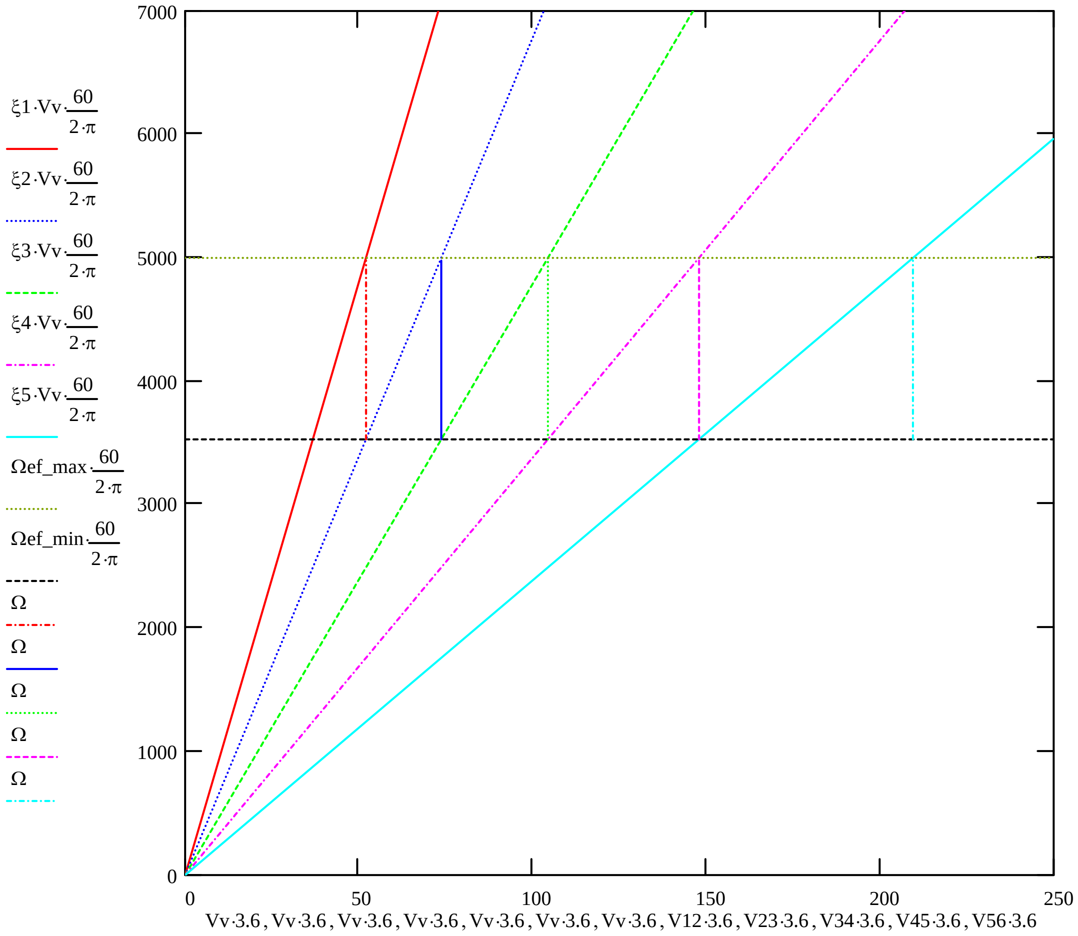
Las velocidades de cambio resultan:

$V12 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 1}$ $V12 \cdot 3.6 = 52.055$ km/h $V23 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 2}$ $V23 \cdot 3.6 = 73.729$ km/h

$V34 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 3}$ $V34 \cdot 3.6 = 104.427$ km/h $V45 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 4}$ $V45 \cdot 3.6 = 147.906$ km/h

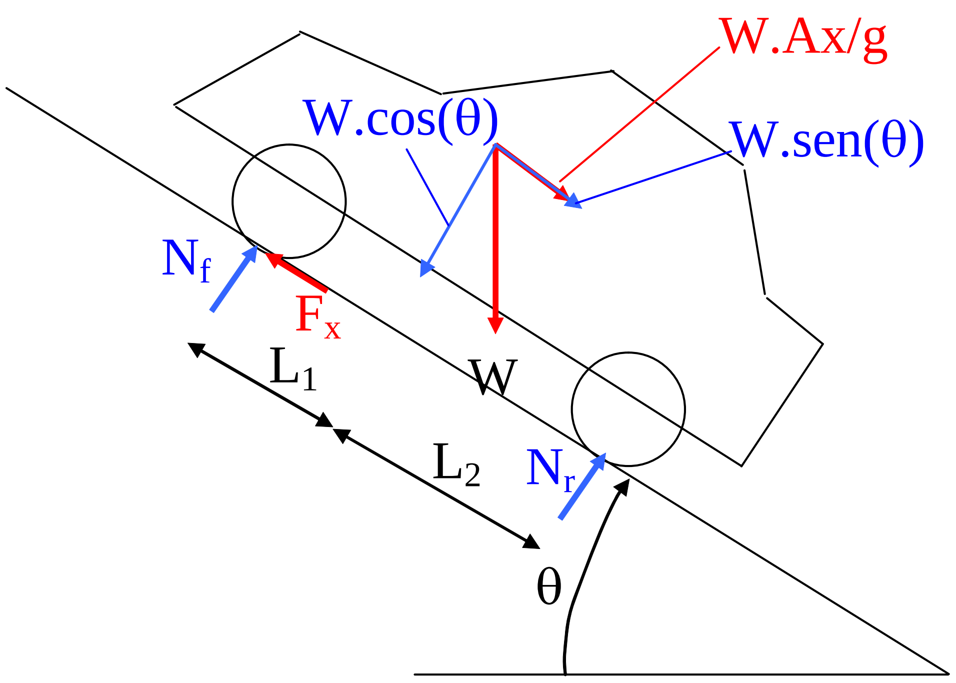
$V56 := \frac{\Omega ef\_max}{\xi 5}$ $V56 \cdot 3.6 = 209.489$ km/h

$$Vv := 0, 0.1 .. \frac{250}{3.6} \qquad \Omega := \Omega ef\_min \cdot \frac{60}{2\cdot\pi}, \Omega ef\_min \cdot \frac{60}{2\cdot\pi} \cdot 1.01 .. \Omega ef\_max \cdot \frac{60}{2\cdot\pi}$$



3. Con qué aceleración máxima podremos arrancar en una rampa de un 15%?. ¿Qué revoluciones llevará el motor?, ¿Qué deslizamiento se producirá en el embrague?. ¿Qué coeficiente de rozamiento mínimo será necesario en las ruedas?.

$$\theta := \mathrm{asin}(0.15)$$



$$Fx = M \cdot Ax + M \cdot g \cdot \sin(\theta) \qquad Ax = \frac{Fx}{M} - 9.81 \cdot \sin(\theta)$$

$$Nf = M \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{L2}{L} - Fx \cdot \frac{h}{L}$$

$$\mu = \frac{Fx}{Nf} = \frac{Fx}{M \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{L2}{L} - Fx \cdot \frac{h}{L}}$$

La fuerza máxima se produce en primera cuando el motor gira a las revoluciones $\Omega tmax$ a las que se alcanza el par máximo Tmax

$$Tmax = 217.615 \qquad \Omega tmax \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi} = 4.197 \bullet 10^3$$

Esta será la velocidad de deslizamiento en el embrague ya que el coche está parado.

$$Fmax := r_1 \cdot rd \cdot \frac{Tmax}{R\_rueda} \qquad Fmax = 7.88 \bullet 10^3$$

$$\mu\_min := \frac{Fmax}{M \cdot 9.81 \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{L2}{L} - Fmax \cdot \frac{h}{L}} \qquad \mu\_min = 1.085$$

Este valor es superior al coef. de roz. máximo esperable entre neumático y carretera

La velocidad a la que se alcanzará este esfuerzo máximo es:

$$Vfmax := \frac{\Omega tmax}{\frac{r_1 \cdot rd}{R\_rueda}} \qquad Vfmax \cdot 3.6 = 43.696 \qquad Ax := \frac{Fmax}{M} - 9.81 \cdot \sin(\theta) \qquad Ax = 3.164$$ m/s2

4. ¿A qué velocidad mínima podremos levantar el pié del embrague arrancando en horizontal? ¿Qué aceleración tendrá el coche en esa situación?

La velocidad mínima corresponderá a una velocidad del motor de 1700 rpm. Como el coche irá en primera, la velocidad del coche será:

$$Vmin := \frac{1700 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60}}{r_1 \cdot rd} \cdot R\_rueda \qquad Vmin \cdot 3.6 = 17.699 \qquad F(1700, 1) = 4.787 \bullet 10^3$$

$$r_1 \cdot rd \cdot \frac{T(1700)}{R\_rueda} = 4.787 \bullet 10^3$$

La aceleración será: $Ax := \frac{F(1700, 1)}{M}$ $\quad Ax = 2.816$ m/s2