Un conjunto tractor/remolque de camión posee las dimensiones indicadas en la figura. El reparto de freno entre los ejes ha sido diseñado para proporcionar la máxima deceleración para un coeficiente de adherencia μ=0,8. Determinar:

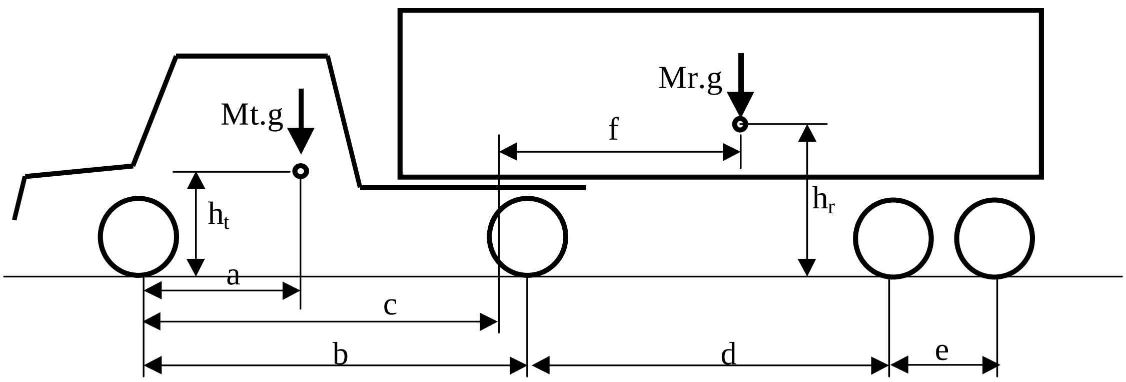
1. Reparto de esfuerzos de freno entre los diferentes ejes del vehículo para un coeficiente de adherencia μ=0,8
2. Máxima deceleración con que podrá detenerse el vehículo en condiciones de adherencia degradada μ=0,25

Nota: se considera que los dos ejes posteriores soportan la misma carga

Masa del tractor Mt= 6.300 kg
Masa del remolque Mr= 32.520 Kg

a= 1.131   b=3.600   c=2.914   e=1.500   d=8.400   f=6.279

ht=800   hr=1.300



Mt := 6300   Mr := 32520

a := 1.131   b := 3.600   c := 2.914   e := 1.500   d := 8.400

f := 6.279   ht := 0.8   hr := 1.3   h5 := 0.700 μn := 0.8 μd := 0.25

Para una adherencia máxima el reparto de freno óptimo es el que permite agotar la adherencia simultáneamente en todos los ejes. En ese caso la deceleración será:

$$Ac := \mu n \cdot 9.81$$

Cargas en condiciones estáticas:

Carga Vertical sobre la quinta rueda:

$$W5s := \frac{d + \frac{e}{2} + (b - c) - f}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} \cdot Mr \cdot 9.81 \qquad \frac{W5s}{1000} = 115.368 \quad \text{kN}$$

Carga vertical sobre el primer eje:

$$W1s := \frac{b - a}{b} \cdot Mt \cdot 9.81 + \frac{b - c}{b} \cdot W5s \qquad \frac{W1s}{1000} = 64.371$$

Carga vertical sobre el segundo eje:

$$W2s := \frac{a}{b} \cdot Mt \cdot 9.81 + \frac{c}{b} \cdot W5s \qquad \frac{W2s}{1000} = 112.8$$

Carga vertical sobre los ejes 3 y 4:

$$W34s := \frac{1}{2}\cdot\frac{f}{d+\frac{e}{2}+(b-c)}\cdot Mr\cdot 9.81 \qquad \frac{W34s}{1000} = 101.827$$

Comprobación de la precisión del cálculo:

$$W1s + W2s + 2\cdot W34s - (Mt + Mr)\cdot 9.81 = 0$$

Esfuerzos de frenado en cada eje (adherencia normal):

Carga dinámica sobre los ejes 3 y 4:
Tomando momentos respecto de la 5ª rueda:

$$Mr\cdot Ac\cdot(hr - h5) - Mr\cdot 9.81\cdot f + 2\cdot W34d\cdot\left[d+\frac{e}{2}+(b-c)\right] + 2\cdot\mu\cdot W34\cdot h5 = 0$$

Despejando W34d

$$W34d := \frac{1}{2}\cdot\frac{Mr\cdot 9.81\cdot f - Mr\cdot Ac\cdot(hr-h5)}{d+\frac{e}{2}+(b-c)+\mu n\cdot h5} \qquad \frac{W34d}{1000} = 88.977$$

Carga de frenado en la 5ª rueda:
Del equilibrio de cargas verticales en el remolque:

$$W5d = Mr\cdot 9.81 - 2\cdot W34d$$

Sustituyendo la expresión de W34d

$$W5d := \frac{Mr\cdot 9.81\cdot\left[d+\frac{e}{2}+(b-c)+\mu n\cdot h5 - f\right] + Mr\cdot Ac\cdot(hr-h5)}{d+\frac{e}{2}+(b-c)+\mu n\cdot h5} \qquad \frac{W5d}{1000} = 141.068$$

Esfuerzo de freno transmitido a través de la 5ª rueda:

$$F5 := Mr\cdot Ac - 2\cdot\mu n\cdot W34d \qquad F5 = 1.129\cdot 10^{5}$$

Carga dinámica en el primer eje:
Tomamos momentos respecto de l punto de apoyo del 2º eje y despejamos W1d

$$W1d := W1s + \frac{ht}{b}\cdot Mt\cdot Ac + \frac{b-c}{b}\cdot(W5d - W5s) + \frac{h5}{b}\cdot F5 \qquad \frac{W1d}{1000} = 102.199$$

Carga dinámica en el segundo eje:

$$W2d := W2s - \frac{ht}{b}\cdot Mt\cdot Ac + \frac{c}{b}\cdot(W5d - W5s) - \frac{h5}{b}\cdot F5 \qquad \frac{W2d}{1000} = 100.672$$

Comprobación de la precisión del cálculo:

$$W1d + W2d + 2 \cdot W34d - (Mt + Mr) \cdot 9.81 = 0$$

Fuerzas de frenado en cada eje:

$F1 := \mu n \cdot W1d$ $\quad F2 := \mu n \cdot W2d$ $\quad F34 := \mu n \cdot W34d$

$F1 = 8.176 \cdot 10^{4}$ $\quad F2 = 8.054 \cdot 10^{4}$ $\quad F34 = 7.118 \cdot 10^{4}$

Comprobación del cálculo:

$$\frac{F1 + F2 + 2 \cdot F34}{Mt + Mr} - Ac = 0$$

Freno bajo condiciones de adherencia degradada:

Tomamos como referencia la fuerza de freno en el primer eje. Los esfuerzos de freno en los ejes restantes son:

$F2 = c2 \cdot F1$ $\quad F34 = c34 \cdot F1$ $\quad c2 := \dfrac{F2}{F1}$ $\quad c34 := \dfrac{F34}{F1}$ $\quad c2 = 0.985$ $\quad c34 = 0.871$

Las cargas dinámicas en las diferentes ruedas son:

Carga dinámica sobre los ejes 3 y 4:
Tomando momentos respecto de la 5ª rueda:

$$Mr \cdot Ac \cdot (hr - h5) - Mr \cdot 9.81 \cdot f + 2 \cdot W34d \cdot \left[d + \frac{e}{2} + (b - c) \right] + 2 \cdot c34 \cdot F1 \cdot h5 = 0$$

Despejando W34d

$$W34d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Mr \cdot 9.81 \cdot f - Mr \cdot Ac \cdot (hr - h5) - 2 \cdot c34 \cdot F1 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)}$$

Además se tiene que cumplir:

$$F1 + c2 \cdot F1 + 2 \cdot c34 \cdot F1 = (Mt + Mr) \cdot Ac$$

Por lo tanto: $\quad Ac = \dfrac{1 + c2 + 2 \cdot c34}{Mt + Mr} \cdot F1$

Denominando: $\quad K := \dfrac{1 + c2 + 2 \cdot c34}{Mt + Mr}$ $\quad K = 9.599 \cdot 10^{-5}$

Podemos expresar la carga dinámica en los ejes 3 y 4:

$$W34d(F1) := \frac{1}{2} \cdot \frac{Mr \cdot 9.81 \cdot f - (Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5) \cdot F1}{d + \frac{e}{2} + (b - c)}$$

$$\frac{W34d(0)}{1000} = 101.827$$

$$\frac{W34d(1000) - W34d(0)}{1000} = -0.157$$

La relación entre la fuerza de freno aplicada y la fuerza máxima resulta:

$$R34(F1,\mu)=\frac{c34\cdot F1}{\mu\cdot W34d}=\frac{c34\cdot F1}{\mu\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{Mr\cdot 9.81\cdot f-(Mr\cdot(hr-h5)\cdot K+2\cdot c34\cdot h5)\cdot F1}{d+\frac{e}{2}+(b-c)}\right]}$$

de dónde:

$$2\cdot c34\cdot\left[d+\frac{e}{2}+(b-c)\right]=17.127$$

$$R34(F1,\mu):=\frac{2\cdot c34\cdot F1\cdot\left[d+\frac{e}{2}+(b-c)\right]}{\mu\cdot(Mr\cdot 9.81\cdot f-(Mr\cdot(hr-h5)\cdot K+2\cdot c34\cdot h5)\cdot F1)}\qquad Mr\cdot 9.81=3.19\cdot 10^{5}$$

$$Mr\cdot(hr-h5)\cdot K+2\cdot c34\cdot h5=3.092$$

Carga de frenado en la 5ª rueda:
Del equilibrio de cargas verticales en el remolque:

$$W5d=Mr\cdot 9.81-2\cdot W34d=Mr\cdot 9.81-\frac{Mr\cdot 9.81\cdot f-(Mr\cdot(hr-h5)\cdot K+2\cdot c34\cdot h5)\cdot F1}{d+\frac{e}{2}+(b-c)}$$

De dónde:

$$W5d(F1):=\frac{Mr\cdot 9.81\cdot\left[d+\frac{e}{2}+(b-c)-f\right]+(Mr\cdot(hr-h5)\cdot K+2\cdot c34\cdot h5)\cdot F1}{d+\frac{e}{2}+(b-c)}\qquad \frac{W5d(0)}{1000}=115.368$$

$$\frac{W5d(1000)-W5d(0)}{1000}=0.314$$

Esfuerzo de freno transmitido a través de la 5ª rueda:

$$F5(F1):=Mr\cdot K\cdot F1-2\cdot c34\cdot F1\qquad Mr\cdot K-2\cdot c34=1.38$$

Carga dinámica en el primer eje:
Tomamos momentos respecto de l punto de apoyo del 2º eje y despejamos W1d

$$W1d(F1):=W1s+\frac{ht}{b}\cdot Mt\cdot K\cdot F1+\frac{b-c}{b}\cdot(W5d(F1)-W5s)+\frac{h5}{b}\cdot F5(F1)\qquad \frac{W1d(0)}{1000}=64.371$$

La relación entre los esfuerzos de frenado y la cargas dinámica es:

$$\frac{W1d(1000)-W1d(0)}{1000}=0.463$$

$$R1(F1,\mu):=\frac{F1}{\mu\cdot W1d(F1)}$$

Carga dinámica en el segundo eje:

$$W2d(F1):=W2s-\frac{ht}{b}\cdot Mt\cdot K\cdot F1+\frac{c}{b}\cdot(W5d(F1)-W5s)-\frac{h5}{b}\cdot F5(F1)\qquad \frac{W2d(0)}{1000}=112.8$$

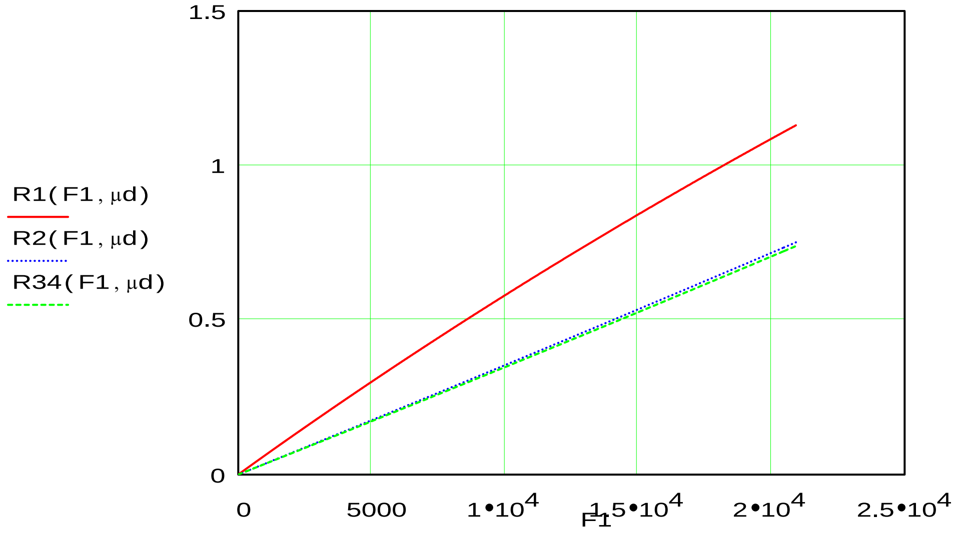
La relación entre los esfuerzos de frenado y la cargas dinámica es:

$$\frac{W2d(1000)-W2d(0)}{1000}=-0.148$$

$$R2(F1,\mu):=\frac{c2\cdot F1}{\mu\cdot W2d(F1)}$$

Representación de las relaciones de adherencia en los tres tipos de ejes:

$$F1 := 0, 10 .. 1.3 \cdot W1d(0) \cdot \mu d$$



Vemos que la condición de adherencia crítica se da en el primer eje. Por tanto será este eje el primero que se bloquee y definirá las máximas prestaciones de deceleración alcanzables. Resolveremos el problema igualando a la unidad la expresión de la relación de adherencia del primer eje. Para ello expresamos de forma explícita, cada término que aparece en la expresión de R1(F1,μ)

$$W5d(F1) = \frac{Mr \cdot 9.81 \cdot \left[d + \frac{e}{2} + (b - c) - f \right] + (Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5) \cdot F1}{d + \frac{e}{2} + (b - c)}$$

Por tanto:

$$W5d(F1) = W5s + \frac{Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} \cdot F1$$

Esfuerzo de freno transmitido a través de la 5ª rueda:

$$F5(F1) = Mr \cdot K \cdot F1 - 2 \cdot c34 \cdot F1 = (Mr \cdot K - 2 \cdot c34) \cdot F1$$

Carga dinámica en el primer eje:
Tomamos momentos respecto de l punto de apoyo del 2º eje y despejamos W1d

$$W1d(F1) = W1s + \frac{ht}{b} \cdot Mt \cdot K \cdot F1 + \frac{b - c}{b} \cdot \frac{Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} \cdot F1 + \frac{h5}{b} \cdot (Mr \cdot K - 2 \cdot c34) \cdot F1$$

$$W1d(F1) = W1s + \left[\frac{ht}{b} \cdot Mt \cdot K + \frac{b - c}{b} \cdot \frac{Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} + \frac{h5}{b} \cdot (Mr \cdot K - 2 \cdot c34) \right] \cdot F1$$

imponiendo la condición de saturación del rozamiento F1=μd.W1d

$$F1 = \mu d \cdot \left[W1s + \left[\frac{ht}{b} \cdot Mt \cdot K + \frac{b - c}{b} \cdot \frac{Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} + \frac{h5}{b} \cdot (Mr \cdot K - 2 \cdot c34) \right] \cdot F1 \right]$$

$$F1(\mu d) := \frac{\mu d \cdot W1s}{1 - \mu d \cdot \left[\frac{ht}{b} \cdot Mt \cdot K + \frac{b - c}{b} \cdot \frac{Mr \cdot (hr - h5) \cdot K + 2 \cdot c34 \cdot h5}{d + \frac{e}{2} + (b - c)} + \frac{h5}{b} \cdot (Mr \cdot K - 2 \cdot c34) \right]}$$

$F1(\mu d) = 1.82 \cdot 10^{4}$ $\quad c2 \cdot F1(\mu d) = 1.793 \cdot 10^{4}$ $\quad c34 \cdot F1(\mu d) = 1.584 \cdot 10^{4}$

Comprobación del resultado: $R1(F1(\mu d), \mu d) = 1$

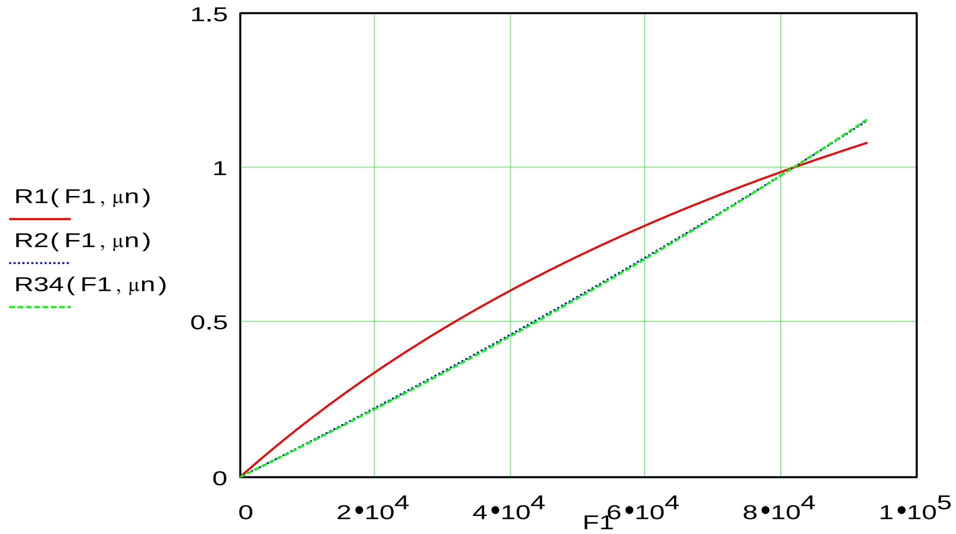
La deceleración es: $Ac := K \cdot F1(\mu d)$ $\quad Ac = 1.747$ m/s2

Comprobamos que para la adherencia nominal el valor es el correcto:

$\frac{F1(\mu n)}{1000} = 81.759$ Valor que hemos obtenido antes

Comprobación de las expresiones en el caso de adherencia nominal

$F1 := 0, 50 .. 1.8 \cdot W1d(0) \cdot \mu n$



Vemos que se cruzan todas las curvas para una relación unidad, lo que coincide con el criterio de diseño que hemos establecido.