Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

Mecánica de Fluidos

ANÁLISIS DIFERENCIAL DE FLUJOS

Alejandro Rivas
Doctor Ingeniero Industrial
Área de Ingeniería Térmica y de Fluidos
Departamento de ingeniería Mecánica

tecnun
CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA. NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA
Paseo de Manuel Lardizábal 13. 20018 Donostia-San Sebastián. Tel.: 943 219 877 Fax: 943 311 442 www.tecnun.es
arivas@tecnun.es

ANÁLISIS DIFERENCIAL DE FLUJOS

1 INTRODUCCIÓN

A la hora de analizar el flujo de un fluido es posible formular las leyes fundamentales que rigen el movimiento del fluido (conservación de la masa, 2ª ley de Newton y la 1ª ley de la termodinámica). Esta formulación puede hacerse bien para el sistema finito de fluido que está ocupando en un instante el volumen de control. O bien para una partícula de fluido que está ocupando en un instante una posición determinada dentro del volumen de control. La primera conduce al ***Análisis Integral*** del flujo y la segunda al ***Análisis Diferencial***.

El *Análisis Diferencial* proporciona una descripción muy detallada del flujo, ya que busca resolver el movimiento de las partículas de fluido que están ocupando en un instante el volumen de control, para lo cual obtiene como solución de las ecuaciones, en el caso del flujo compresible de un fluido monofásico, la descripción euleriana de sus *velocidades*, *presiones*, *temperaturas* y *densidades*. Su aplicación se ve dificultada al tratar con un modelo matemático en ecuaciones en derivadas parciales no lineales y con el fenómeno de la turbulencia. Son muy escasos los flujos, todos ellos en régimen laminar (sin turbulencia) y en geometrías sencillas, en los que las ecuaciones se pueden simplificar hasta reducirlas a unas que puedan resolverse de manera analítica. El análisis diferencial de aquellos flujos que posean geometrías complejas y/o estén en régimen turbulento, requerirá de la utilización de técnicas numéricas avanzadas de resolución por computadora de las ecuaciones diferenciales (*Computational Fluid Dynamics CFD*).

Por el contrario, el *Análisis Integral* no proporciona una descripción tan detallada del flujo como el *Diferencial*. Sus ecuaciones relacionan magnitudes integrales tales como la masa, cantidad de movimiento y energía que hay en un instante dentro del volumen de control, los flujos de estas magnitudes que atraviesan la superficie de control, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el sistema que está ocupando el volumen de control y las velocidades de intercambio neto de energía (potencias) entre este último y el entorno. La aplicación del *Análisis Integral* es más sencilla que la del *Diferencial* ya que sus ecuaciones admiten su simplificación o aproximación de manera sencilla y en la mayoría de los casos quedan reducidas a ecuaciones algebraicas o a ecuaciones diferenciales ordinarias.

El *Análisis Integral* es recomendable como primera alternativa al estudio de un flujo, quedando el problema formulado en términos de magnitudes que suelen ser de interés para el ingeniero. No obstante, la aplicación del *Análisis Integral* requiere en ocasiones de información adicional sobre el flujo que proviene de la experimentación o del *Análisis Diferencial*.

2 ECUACIONES DIFERENCIALES

Uno de los pilares del análisis diferencial de un flujo son las ecuaciones diferenciales las cuales expresan las leyes fundamentales mediante unas determinadas relaciones entre las magnitudes incógnitas (*velocidad*, *presión*, *densidad y temperatura*) y ciertas propiedades del fluido.

En el Curso de *Mecánica de Fluidos* se ha hecho más hincapié en los flujos incompresibles, es decir aquéllos en los que la densidad ρ se pueden considerar constante. En un flujo incompresible la presión deja de ser una variable termodinámica y por tanto no está termodinámicamente ligada a la temperatura (T) y a la densidad. En ese caso la temperatura del fluido se halla desacoplada de la *velocidad* (**v**) y la *presión* (p). Estas dos últimas pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones de *Conservación de la Masa* y la 2ª *Ley de Newton* para, a continuación si se desea, hallar la temperatura mediante la 1ª *Ley de la Termodinámica*.

Aunque el campo de temperaturas del flujo no es objeto del curso de *Mecánica de Fluidos*, si lo es en el de *Transferencia de Calor* y para que este documento sea útil en este último se presentará la mencionada ecuación de la 1ª *ley de la Termodinámica*.

2.1 Ley de Conservación de la masa

La *ley de conservación de la masa* establece que la masa (δm) de una partícula de fluido debe permanecer constante en el tiempo. Matemáticamente:

$$\frac{D}{Dt}(\delta m) = 0 \qquad \text{Ec. 1}$$

La masa de la partícula viene dada por el producto de la densidad por el volumen (δV) de la misma:

$$\delta m = \rho \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 2}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. 1

$$\delta V \cdot \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0 \qquad \text{Ec. 3}$$

Que puesta en función de la *Velocidad de Deformación Volumétrica* [1] de la partícula ($\dot{V}$):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \dot{V} = 0 \qquad \text{Ec. 4}$$

En el caso de un flujo incompresible ($D\rho/Dt=0$):

$$\dot{V} = 0 \qquad \text{Ec. 5}$$

La conservación de la masa de un flujo incompresible exige que la *Velocidad de Deformación Volumétrica* de las partículas sea nula.

2.2 2ª Ley de Newton

La 2ª *ley de Newton* establece que la rapidez con la que varía en el tiempo la cantidad de movimiento ($\delta\boldsymbol{M}$) de una partícula es igual a la resultante de las fuerzas ($\delta\boldsymbol{F}_{EXT}$) que actúan sobre la misma:

$$\frac{D}{Dt}(\delta\mathbf{M}) = \delta\mathbf{F}_{EXT} \qquad \text{Ec. 6}$$

La cantidad de movimiento de la partícula viene dada por el producto de su masa por su velocidad ($\mathbf{v}$):

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{v}\cdot\delta m \qquad \text{Ec. 7}$$

Sustituyendo esta última ecuación en la Ec. 6 y utilizando la *ley de Conservación de la Masa* resulta:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot\rho\cdot\delta V = \delta\mathbf{F}_{EXT} \qquad \text{Ec. 8}$$

Sobre un fluido actúan dos tipos de fuerzas, las volumétricas y las de superficie. Las primeras se encuentran distribuidas en el volumen del fluido y las segundas en la superficie del mismo. La resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es por tanto la suma de las resultantes de las fuerzas de volumen ($\delta\mathbf{F}_V$) y de superficie ($\delta\mathbf{F}_{SP}$):

$$\delta\mathbf{F}_{EXT} = \delta\mathbf{F}_V + \delta\mathbf{F}_{SP} \qquad \text{Ec. 9}$$

Incluyendo Ec. 9 en la Ec. 8 quedaría:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot\rho\cdot\delta V = \delta\mathbf{F}_V + \delta\mathbf{F}_{SP} \qquad \text{Ec. 10}$$

Si multiplicamos ambos miembros por la velocidad de la partícula la Ec. 10 se convierte en una ecuación de la *energía cinética*.

$$\frac{De_K}{Dt}\cdot\rho\cdot\delta V = \left(\delta\mathbf{F}_V + \delta\mathbf{F}_{SP}\right)\cdot\mathbf{v} \qquad \text{Ec. 11}$$

Donde $e_K=(1/2)\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ es la energía cinética por unidad de masa de la partícula.

2.3 1ª Ley de la Termodinámica

La 1ª Ley de la Termodinámica establece que la rapidez con la que cambia en el tiempo la *energía total* de una partícula de fluido (δE) es igual a la velocidad de transferencia neta de energía ($\dot{W}+\dot{Q}$ potencias) entre el sistema y su entorno. Como la partícula y su entorno pueden intercambiar energía en forma de calor (diferencia de temperaturas) o de trabajo (por la acción de unas fuerzas) la ley se expresaría como:

$$\frac{D(\delta E)}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W} \qquad \text{Ec. 12}$$

Donde la *energía total* de la partícula suma de su *energía cinética* (δE_K) y su *energía interna* ($\delta\widetilde{U}$). La energía total se puede escribir como:

$$\delta E = e \cdot \delta m = \left(e_K + \tilde{u}\right) \cdot \rho \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 13}$$

Como existen dos tipos de fuerzas que actúan sobre la partícula, la potencia asociada al trabajo de todas las fuerzas se puede expresar como suma de la potencia del trabajo de las fuerzas de volumen y de la potencia del trabajo de las fuerzas de superficie:

$$\frac{D\left(e_K + \tilde{u}\right)}{Dt} \cdot \rho \cdot \delta V = \dot{Q} + \dot{W}_V + \dot{W}_{SP} \qquad \text{Ec. 14}$$

2.4 Enfoque Euleriano

Las Leyes Fundamentales y por tanto las ecuaciones que las representan tienen un *enfoque lagrangiano*, ya que hacen referencia a la relación entre ciertas magnitudes de una determinada partícula de fluido. Habitualmente en Mecánica de Fluidos se adopta un *enfoque euleriano* en el que el objetivo no es conocer las magnitudes de unas partículas de fluido concretas, sino la distribución de dichas magnitudes en el fluido que está ocupando una región del espacio denominada *Volumen de Control* o *Dominio de Flujo*. De este modo, las magnitudes vendrán matemáticamente representadas por funciones de la posición (**x**) y el tiempo *t* y no corresponderán a las magnitudes de ninguna partícula de fluido en concreto. Es lo que se denomina como descripción euleriana de las magnitudes. Así por ejemplo la velocidad estará representada por $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y la presión por $p(\mathbf{x},t)$.

Como ya se ha mencionado, las leyes fundamentales no hacen referencia directa a la distribución de magnitudes en una región del espacio. Para obtener una formulación de las leyes de acuerdo con el enfoque euleriano adoptado es necesario hacer uso de la expresión denominada *Derivada Material* o *Derivada Sustancial*. Dicha expresión establece que dada la descripción euleriana de cierta magnitud de las partículas de fluido $\beta(\mathbf{x},t)$ la descripción de la magnitud que representa la rapidez con la que cambia la magnitud β en una partícula viene dada por:

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta(\mathbf{x},t)}{\partial t} + grad\left[\beta(\mathbf{x},t)\right] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \qquad \text{Ec. 15}$$

Empleando esta expresión, el primer miembro de las ecuaciones Ec. 3, (y Ec. 5) Ec. 10 (y Ec. 11) y Ec. 14 quedará transformado a su forma euleriana. Entre las ventajas del enfoque euleriano se encuentra que los términos que aparecen en el segundo miembro de las ecuaciones (Fuerzas y Potencias) se expresan de manera más sencilla que en el enfoque lagrangiano.

2.5 Ecuación de la Continuidad

La magnitud cinemática principal en el enfoque euleriano es el *campo de Velocidades* $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$. Se ha demostrado [1] que el campo de *Velocidad de Deformación Volumétrica* de un flujo puede calcularse a partir de su campo de velocidades mediante:

$$\dot{V} = Tr(\mathbf{D}) = div(\mathbf{v}) \qquad \text{Ec. 16}$$

Donde **D** es la *matriz de velocidad de deformación* del flujo [1]. Por lo tanto la *Ley de Conservación de la Masa* quedará como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho \cdot div(\mathbf{v}) = 0 \qquad \text{Ec. 17}$$

Para un flujo incompresible queda como:

$$div(\mathbf{v}) = 0 \qquad \text{Ec. 18}$$

2.6 Ecuación de la Cantidad de Movimiento

El primer miembro de la ecuación de la cantidad de movimiento (Ec. 10) quedará transformado empleando la expresión de la derivada material (Ec. 15) que proporciona el campo de aceleraciones $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ a partir del de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \qquad \text{Ec. 19}$$

El término $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{r}$ es el gradiente de velocidades y se trata de una matriz (tensor) cuyos elementos son función de las componentes del campo de velocidades y de las derivadas de éstas respecto a las coordenadas espaciales [1].

En el enfoque euleriano las fuerzas de volumen y las de superficie se cuantifican respectivamente mediante el vector, *fuerzas de volumen por unidad de volumen*, $\mathbf{f}_V(\mathbf{x},t)$ y el *tensor de tensiones,* $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$ [1].

La resultante de las fuerzas de volumen que actúan sobre una partícula viene dada por [1]:

$$\delta\mathbf{F}_V = \mathbf{f}_V \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 20}$$

En el caso de que las únicas fuerzas de volumen consideradas sean las gravitatorias:

$$\delta\mathbf{F}_V = \gamma \cdot \mathbf{e}_g \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 21}$$

Siendo $\gamma=\rho\cdot g$ el peso específico del fluido y $\mathbf{e}_g$ un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que la aceleración de la gravedad.

La resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre una partícula viene dado por:

$$\delta\mathbf{F}_{SP} = div(\mathbf{T}) \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 22}$$

Sustituyendo en la Ec. 9 se tiene:

$$\delta\mathbf{F}_{EXT} = \left[\mathbf{f}_V + div(\mathbf{T})\right] \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 23}$$

De esta manera la ecuación de la 2ª Ley de Newton o de la Cantidad de Movimiento queda como:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{f}_V + div(\mathbf{T}) \qquad \text{Ec. 24}$$

Y la ecuación de la energía cinética quedará como:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial e_K}{\partial t} + \nabla e_K \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + div(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \qquad \text{Ec. 25}$$

2.7 Ecuación de la energía

En el curso de *Transferencia de Calor* se demostrará que la potencia asociada al intercambio de calor entre la partícula y su entorno viene dado por la *Ley de Fourier* como:

$$\dot{Q} = \nabla(k \cdot \nabla T) \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 26}$$

Siendo k la *conductividad* y T la *temperatura* del fluido respectivamente.

También es posible demostrar que la potencia del trabajo de las fuerzas puede expresarse:

$$\dot{W}_V + \dot{W}_{SP} = [\mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + div(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})] \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 27}$$

Que puede desarrollarse como:

$$\dot{W}_V + \dot{W}_{SP} = \left[\mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + div(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right] \cdot \delta V \qquad \text{Ec. 28}$$

Donde el operador $\otimes$ aplicado a dos tensores (matrices) da como resultado un escalar (ver ANEXO).

Sustituyendo esta última ecuación y la Ec. 26 en Ec. 14 se obtiene

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial (e_K + \tilde{u})}{\partial t} + \nabla (e_K + \tilde{u}) \cdot \mathbf{v} \right] = \nabla(k \cdot \nabla T) + \mathbf{T} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + div(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \qquad \text{Ec. 29}$$

Restando la Ec. 25 de la Ec. 29 resultará:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{v} \right) = \nabla(k \cdot \nabla T) + \mathbf{T} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \qquad \text{Ec. 30}$$

2.8 Ecuación constitutiva de un fluido newtoniano y ecuaciones de Navier-Stokes

En Ec. 24 y Ec. 29 aparece la matriz de tensiones del fluido **T** que no se encontraba en la lista de incógnitas (a saber **v**, *p*, *T* y ρ en el caso compresible y **v**, *p* y *T* en el caso incompresible). Para eliminar **T** de las ecuaciones y proceder a lo que en Matemáticas se denomina *cierre de las ecuaciones* (igualar el número de ecuaciones y de incógnitas) se introduce la *ecuación constitutiva* [1] que en el caso de un *fluido newtoniano* es:

$$\mathbf{T} = -p \cdot \mathbf{I} + 2\mu \cdot \left[\mathbf{D} - \frac{1}{3} Tr(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{I}\right] \qquad \text{Ec. 31}$$

Siendo μ la viscosidad dinámica del fluido, *p* la presión.

Sustituyendo la ecuación constitutiva en Ec. 24 y Ec. 29 se obtiene:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla(\mu \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{2}{3}\mu \cdot \nabla[Tr(\mathbf{D})] \qquad \text{Ec. 32}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{v}\right) = \nabla(k \cdot \nabla T) - p \cdot Tr(\mathbf{D}) - \frac{2}{3}\mu \cdot [Tr(\mathbf{D})]^2 + 2\mu \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \qquad \text{Ec. 33}$$

Empleando la definición de Velocidad de Deformación Volumétrica (Ec. 16) se obtiene:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla(\mu \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{2}{3}\mu \cdot \nabla(\dot{V}) \qquad \text{Ec. 34}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{v}\right) = \nabla(k \cdot \nabla T) - p \cdot \dot{V} - \frac{2}{3}\mu \cdot (\dot{V})^2 + 2\mu \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \qquad \text{Ec. 35}$$

O también:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla(\mu \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{2}{3}\mu \cdot \nabla[div(\mathbf{v})] + \mathbf{f}_V \qquad \text{Ec. 36}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{v}\right) = \nabla(k \cdot \nabla T) - p \cdot \dot{V} - \frac{2}{3}\mu \cdot [div(\mathbf{v})]^2 + 2\mu \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \qquad \text{Ec. 37}$$

En el caso de flujo incompresible la densidad ρ, viscosidad μ y la conductividad térmica k se consideran constantes y además la energía interna viene dada por $\tilde{u} = C_V \cdot T$, siendo C_v el calor específico a volumen constante. Las ecuaciones de la Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía quedan:

$$div(\mathbf{v}) = 0 \qquad \text{Ec. 38}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}_V}{\rho} \qquad \text{Ec. 39}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \frac{k}{\rho \cdot C_V} \cdot \nabla^2 T + \frac{2\nu}{C_V} \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \qquad \text{Ec. 40}$$

Siendo ∇ y ∇^2 los operadores diferenciales gradiente y laplaciano respectivamente [1] y ν la *viscosidad cinemática* del fluido.

Las ecuaciones diferenciales Ec. 38, Ec. 39 y Ec. 40 representan las leyes de la Conservación de la Masa, la 2ª de Newton y la 1ª ley de la Termodinámica para un flujo incompresible. Reciben el nombre de *ecuaciones de Navier-Stokes* en honor a los dos científicos que las propusieron en el siglo XIX. Se puede comprobar como Ec. 38 y Ec. 39 están desacopladas de la Ec. 40.

Si las únicas fuerzas de volumen que se van a considerar son las gravitatorias, entonces la Ec. 39 quedaría como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + g \cdot \mathbf{e}_g \qquad \text{Ec. 41}$$

Si se toma un sistema de referencia para la cota (h) se cumple que:

$$\mathbf{e}_g = -\nabla h \qquad \text{Ec. 42}$$

Por lo que la Ec. 41 quedará como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} - g \cdot \nabla h \qquad \text{Ec. 43}$$

Apareciendo la *altura piezométrica* del fluido $H=p/\gamma+h$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -g \cdot \nabla H + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \qquad \text{Ec. 44}$$

3 CONDICIONES DE CONTORNO E INICIALES

El modelo matemático diferencial de un flujo no está compuesto únicamente por las ecuaciones diferenciales y las propiedades del fluido (en el caso incompresible ρ, μ y C_V). La geometría de la región del espacio donde se mueve el fluido (dominio de flujo o volumen de control) y las condiciones en la frontera de esta región determinan junto con las ecuaciones diferenciales el movimiento del fluido. La geometría del dominio de flujo y las condiciones que representan el comportamiento del fluido en la frontera se introducen en el modelo matemático mediante las *condiciones de contorno.* Las condiciones de contorno modelan el comportamiento del fluido en las fronteras mediante ciertas relaciones que deben satisfacer las magnitudes incógnitas en esos puntos.

Si además por alguna razón el flujo variase con el tiempo y no fuera estacionario habría que introducir las condiciones iniciales estableciendo el valor de las magnitudes incógnitas en todo el dominio de flujo para el instante inicial. Las condiciones iniciales deben satisfacer tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones de contorno.

Por ejemplo, en el caso de que alguna de las fronteras del dominio coincida con una superficie sólida la *condición de no-deslizamiento* establece que el fluido en contacto con dicha superficie posee la misma velocidad que esta última. Esta condición se expresa como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_W \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Superficie Sólida} \qquad \text{Ec. 45}$$

Las superficies sólidas (paredes) son fronteras que aparecen en muchísimos flujos pero no son las únicas condiciones de contorno posibles. Existen otros tipos como las condiciones de entrada, salida o superficie de contacto con otro fluido. Una descripción más detallada de ellas se puede encontrar en [2].

4 BIBLIOGRAFÍA

[1] ***Curso de Mecánica de Fluidos. Transparencias de Clase***. TECNUN. Alejandro Rivas. Temas 2 y 3.

[2] ***Mecánica de Fluidos***. McGraw-Hill. Frank M. White. Capítulo 4.

5 ANEXO

Sean dos matrices A y B *n*x*n*, el escalar que resulta de la operación ⊗ se calcula como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij} \qquad \text{Ec. 46}$$